大连理工大学 2003 年硕士入学考试数学分析试题

一.（100 分）

以下各题为必答题，每题 10 分。

1.设$\{x_n\},\{y_n\}$都是有界数列，证明：$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n + \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n \le \overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)$.

2.叙述下列极限的柯西收敛原理：

$(1)\lim\limits_{x\to a+} f(x),(2)\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$.

3.证明：$f(x)=\sin x$在$(-\infty,+\infty)$上一致收敛，但$g(x)=\sin x^2$在$(-\infty,+\infty)$上部一致收敛。

4.设$f(x)=\{\begin{matrix} e^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{matrix}$,证明：对任何自然数$n$，$f^n(0)=0$.

5.设$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=A$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)dx=A$.

6.设正项级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛。证明：对任何$r>1$,级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n'$都收敛。逆命题成立否?

7.设$f(x)$在$[a,+\infty)$上一致连续，且广义积分$\int_a^{+\infty} f(x)dx$收敛，证明:$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$.

8.证明：函数列$f_n=(1-x)x^n(n=1,2,\ldots)$在$[0,1]$上一致收敛到0，但函数列$g_n(x)=(1-x^n)x(n=1,2,..)$在$[0,1]$上非一致收敛。

9.将$f(x)=x^2$在[0，π）上展开为正弦级数。

10.将二重积分$\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} f(ax+by)dxdy$化为定积分，其中$a,b$是不全为零的实数。

二.（50 分）。

从以下 11——20 体中选答 5 题，每题 10 分。

11.设$x_n>0.n=1,2,..$且$\lim\limits_{n\to+\infty} x_n=0$.证明：存在无数多个下标$n$,使对所有自然数$k$,都有$x_n>x_{n+k}$.

12.设C是一条无重点的，逐段光滑的闭曲线且坐标原点在闭曲线的内部。计算积分

$\int_C \frac{xdy-ydx}{x^2+y^2}$.

13.设$f(x,y)=x^y(x>0,y>0)$问$\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$是否存在?

14.试确定常数a,b,c.使得函数$f(x,y,z)=axy^2+bxy+cz^2$在$(1,2,-1)$点沿x轴正向的方向导数取最大值64。

15.设$f(x)$在$[0,1]$上可微，$f(0)=0,$且$\left|f^{'}(x)\right|\le\left|f(x)\right|$.证明：$f(x)\equiv 0,(x\in[0,1])$.

16.设$f(x)$在区间(a,b)中有连续导数$f^{'}(x)$.证明：函数列$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right](n=1,2,\ldots)$

在(a,b)中内闭一致收敛于$f^{'}(x)$.

17。设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$g(x)$在$[a,b]$上可积，且$f(x)>0,g(x)>0$.证明：

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left[\int_a^b f^n(x)g(x)dx\right]^{\frac{1}{x}}=\max\limits_{x\in[a,b]}f(x)$.

18.已知$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.计算积分$\int_0^{+\infty}e^{-x^2}\cos\alpha x dx$.

19.设$D=\{(x,y):0<x<1,0<y<1\}$,并且函数$g(x,y)=ax^2+2bxy+cy^2+dx+dy$(其中$a,b,c,d$是常数)
在D的边界上非正，亦即$g(x,y)\le 0,(x,y)\in\partial D$.证明：
若$(x，y)\in D$,则$g(x,y)\le 0$.

20.设幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径$R<+\infty$,且在开区间$(-R,+R)$上一致收敛。证明：
他在$[-R,+R]$上也一致收敛。