大连理工大学二OO四年硕士生入学考试

《数学物理方法》 试题

共 2 页

注：答题必须注明题号答在答题纸上，否则试卷作废！

一、基本题（50 分）

1．简述什么是单联通域？并写出单联通域的柯西定理。

2．将函数 $f(x)$ 在一环形区域内任一点 $z=b$ 处进行洛朗展开时，展开的条件是什么？能否像泰勒展开那样用 $c_k = f^{(k)}(b)/k!$ 来求展开系数？为什么？

3．简述留数定理，并写出其数学表示式。

4．拉普拉斯变换的定义是什么？它存在的条件是什么？

5．什么是 δ 函数？在物理上它有什么意义？它有哪些主要的物理性质？

6．在一般情况下，一个数学物理方程的边界条件有哪几类？并写出相应的表示式。

7．说明分离变量法有哪几个求解步骤？其中最关键的是哪一步？

8．分别写出实数形式和复数形式的球函数 $Y_l^m(\theta,\varphi)$ 的表示式，并说明对于给定的 l 值，有多少个球函数？

9．什么是 Bessel 函数 $J_n(x)$ 的零点？它与 Bessel 方程的何种本征值问题有关？有什么样的关系？

10．什么是格林函数法？它适用于求解哪些定解问题？

二、利用留数定理计算如下积分（20 分）：

（1） $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}dx$，其中 $a,b>0$

（2） $\int_0^\pi \frac{d\theta}{1+\sin^2\theta}$

三、用傅立叶积分变换法求解如下方程（20 分）

$u_{tt} - a^2 u_{xx} = f(x,t) \quad (-\infty < x < \infty, t>0)$

$u(x,0)=0$

其中 $f(x,t)$ 是 x 和 t 的任意函数。

四、试用分离变量法求解如下非齐次热传导方程的解（20 分）

$u_t - a^2 u_{xx} = A\cos(\pi x/l)\sin(\omega t) \quad (0<x<l, t>0)$

$u_t(0,t)=0$

$u_x(l,t)=0$

$u(x,0)=0$

其中 a, A 和 ω 都是常数。

五、有一个内外半径分别为 a 和 b 的球壳，其内外表面上的电势分别为 $u|_{r=a}=u_0$ 和 $u|_{r=b}=u_0\cos^2\theta$ 其中 u_0 为常数。求球壳内 $(a<r<b)$ 的电势分布。（20 分）

六、（20 分）

（1） 写出 Bessel 函数的母函数的公式；

（2） 利用母函数公式证明如下递推关系：

$$J_{n-1}(x) + J_{n+1} = \frac{2n}{x}J_n(x)$$

$$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n(x)$$