大连理工大学 2004 年硕士生入学考试<<高等代数>>试题

说明：填空题的括号在原试题中均是横线

一．填空题（每小题四分）

1.设$f(x),g(x)$是有理系数多项式，且$f(x),g(x)$在复数域内无公共根，则$f(x),g(x)$在有理数域上的最大公因式是$=$（）

2.n阶行列式$D_n=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 2-n \\ 1 & 1 & \cdots & 2-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{bmatrix}=$

3.设α是三维列向量，α^T是α的转置矩阵，若$\alpha\alpha^T=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$,则$\alpha^T\alpha=$

4.设向量组α_1，α_2，α_3线性无关，向量组β_1，β_2，β_3可又向量组α_1，α_2，α_3线性表示：

$\beta_1=\alpha_1+4\alpha_2+\alpha_3$

$\beta_2=2\alpha_1+\alpha_2-\alpha_3$

$\beta_3=\alpha_1-3\alpha_3$

则β_1，β_2，β_3线性()

5.设A是n阶矩阵，如果$r(A)=n-1$,且代数余子式$A_{11}\neq 0$,则齐次线性方程组$Ax=0$得通解是（）

6.已知$A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ x & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$有三个线性无关的特征向量，则$x=$（）

7.已知n阶实对称矩阵A的特征值中有m个0，t各正实数，则A的秩,正惯性指数，负惯性指数及符号差分别是（）

8.设P是数域，$p^{3\times3}$表示P上的所有3×3矩阵的集合，对于矩阵的加法及数乘运算，$p^{3\times3}$是P上的线性空间,令$V=\{A\in p^{3\times3}\,|\,TrA=0\}$,则$V$的维数$=$（），$V$的一组基为（）

9.设$e_{1,}e_2\cdots,e_n$和$f_1,f_2,\cdots,f_n$是线性空间V的两组基，且$e_{1,}e_2\cdots,e_n$到$f_1,f_2,\cdots,f_n$的过渡矩阵是P,若σ是V上的线性变换，且$\sigma(e_i)=f_i,i=1,2,...,$则$\sigma$在$\beta_i$下的矩阵是（）

10.已知三维欧式空间V中有一组基α_1，α_2，α_3，其度量矩阵为$A=\begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$,

则向量$\beta=2\alpha_1+3\alpha_2-\alpha_3$的长度为（）

二：（24 分）设 R,Q 分别表示实数域和有理数域，f(x),g(x)属于 Q[x].证明：

（1） 若在 R[x]中有 g(x)|f(x),则在 Q[x]中也有 g(x)|f(x)。

（2） f(x)与 g(x)在 Q[x]中互素，当且仅当 f(x)与 g(x)在 R[x]互素。

（3） 设 f(x)是 Q[x]中不可约多项式，则 f(x)的根都是单根。

三:（10 分）设 A 是秩为 r 的 m 乘 n 阶矩阵，证明存在秩为 n-r 的 n 阶方阵 B 使 AB=0.

四:（10 分）设 A 是 n 级方阵，证明存在一可逆矩阵 B 及一个幂等矩阵 C 使 A=BC.

五:（20 分）设 V 是 4 维欧式空间，A 是 V 的一个正交变换。若 A 没有实特征值，求证：A 可分解为两个正交的二维 A 不变子空间的直和.

六:（10 分）设 n 阶矩阵 A 满足 A*A=0，确定 A 的 Jordan 标准型.

七:（20 分）设 J 是表示元素全为 1 的级矩阵，设 f(x)=ax+b 是实系数多项式，令 A=f(J)

（1） 求 J 得全部特征值和特征向量

（2） 求 A 得所有特征子空间

八:（16 分）设 V 是实数域上 n 维线性空间，f 为 V 上的正定对称双线性函数，U 是 V 的有限维子空间，W={c|f(c,b)=0,b 是中任意向量}。证明：

（1） W 是 V 的子空间

（2） V 是 U 和 W 的直和