大连理工大学 2004 年硕士入学考试《数学分析》试题

1．叙述数列$\left\{a_n\right\}$发散的定义，并证明数列$\left\{\cos n\right\}$发散.

2．设 $f(x)$ 在$[a,b]$上连续，对 $x\in[a,b]$，定义$m(x)=\inf\limits_{a\le t\le x} f(t)$．证明：$m(x)$在$[a,b]$上连续.

3．设 $f(x)$ 在$(-\infty,c)$内可导，且$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to c-} f(x)=A$．求证：存在一点$\xi\in(-\infty,c)$使得 $f'(\xi)=0$.

4．设 $f(x)$ 在$(0,1]$上连续，可导，并且$\lim\limits_{x\to0+} x^{\frac{3}{2}} f'(x)$存在．求证： $f(x)$在$(0,1]$上一致连续.

5．设$a_n>0$，$n=1,2,\cdots$, 且有$\lim\limits_{n\to\infty} n(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1)=c>0$，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$收敛.

6．求级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^2+n+1}{2}$的和.

7．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上二阶可导，且有 $f(0)=f(1)=0$，$\min\limits_{x\in[0,1]} f(x)=-\dfrac{1}{2}$．证明：存在$\xi\in(0,1)$，使得 $f''(\xi)\ge4$.

8．证明：对于任意$\alpha>0$，广义积分$\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+x^2)}\sin tdx$关于$t\in(0,+\infty)$一致收敛.

9．设二元函数 $f(x,y)$ 在$[a,b]\times[c,d]$上连续，函数列$\varphi_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且$a\le\varphi_n(x)\le b$，函数列$\psi_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛，且$c\le\psi_n(x)\le d$，求证：函数列$F_n=f(\varphi_n(x),\psi_n(x))$在$[a,b]$上一致收敛.

10．设 $f(x)$ 在$[0,1]$上可积，且在$x=1$处连续，证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 x^n f(x)dx=f(1)$.

11．设$A=(a_{ij})_{3\times3}$是实对称正定矩阵，Ω是椭球体：$\sum\limits_{i,j=1}^{3}a_{ij}x_ix_j\le1$，求$\Omega$的体积.

12．设$A=(a_{ij})$为n阶实对称方阵，定义R^n上齐二次函数$h(x)=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$．证明：函数$h(x)$在条件$\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2=1$下的最小值是$A$的最小特征值.

13．计算积分：$I=\int_\Gamma(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中$\Gamma$为平面$x+y+z=\dfrac{3}{2}$和立方体$0\le x\le a,0\le y\le a,0\le z\le a$的交线，站在第一象限$x+y+z>\dfrac{3}{2}$处看$\Gamma$为逆时针方向.

14．假设函数$u_n(x)$（$n=1,2,\cdots,$）在$[a,b]$上可导，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$x_0\in[a,b]$收敛，而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$在$[a,b]$上一致收敛，求证：$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

15．将 $f(x)=x$（$x\in[0,\pi)$）分别展开为正弦级数和余弦级数.