# 大 连 理 工 大 学

## 二〇〇五年攻读硕士研究生入学考试试题

考试科目：数学分析（311）

**一、（30 分）计算题**

1、 求极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n^2}$，其中$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。

2、 求极限：$\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x^2}$。

3、 证明区间$(0,1)$和$(0,+\infty)$具有相同的基数（势）。

4、 计算积分：$\iint\limits_D\dfrac{1}{y^2+x}dxdy$，其中$D$是$x=0$，$y=1$，$y=x$所围成的区域。

5、 计算第二类曲线积分：$I=\int_C\dfrac{-ydx+xdy}{x^2+y^2}$，$C:x^2+2y^2=1$，方向为逆时针。

6、 设$a>0$，$b>0$，证明：$\left(\dfrac{a+1}{b+1}\right)^{b+1}\ge\left(\dfrac{a}{b}\right)^b$。

**以下每题均为 10 分。**

二、设$f(x)$为$[a,b]$上的有界可测函数且$\int\limits_{[a,b]}f^2(x)dx=0$，证明：$f(x)$在$[a,b]$上几乎处处为零。

三、设函数$f(x)$在开区间$(0,+\infty)$内连续且有界，试讨论$f(x)$在$(0,+\infty)$内的一致连续性。

四、设$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{\sqrt{x^4+y^2}} & x^2+y^2>0\\ 0 & x^2+y^2=0\end{cases}$，讨论$f(x,y)$在原点处的连续性，偏导数存在性及可微性。

五、设$f(x)$在$(a,b)$内二次可微，求证：$\exists\xi\in(a,b)$，使得

$$f(b)-2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(a)=\frac{(b-a)^2}{4}f''(\xi)\text{。}$$

六、$f(x)$在$R$上二次可导，$\forall x\in R$，$f''(x)>0$，又$\exists x_0\in R$，$f(x_0)<0$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=\alpha<0$，$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=\beta>0$，证明：$f(x)$在$R$上恰有两个零点。

七、设函数$f(x)$和$g(x)$在$[a,b]$内可积，证明：对$[a,b]$的任意分割

$\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$，$\forall \xi_i, \eta_i \in [x_i, x_{i+1}]$，$i = 0,1,\cdots,n-1$，有

$$\lim_{|\Delta|\to 0}\sum_{i=0}^{n-1} f(\xi_i)g(\eta_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)g(x)dx\text{。}$$

八、求级数：$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{3n+1}$。

九、试讨论函数项级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} x(n^2 e^{-n^2x^2} - (n-1)^2 e^{-(n-1)^2x^2})$ 在区间 $(0,1)$ 和 $(1,+\infty)$ 上的一致收敛性。

十、计算 $I = \iint_\Sigma (x^2dydz + y^2dzdx + z^2dxdy)$，其中 $\Sigma$ 为圆锥曲面 $x^2 + y^2 = z^2$ 被平面 $z = 0$ 与 $z = 2$ 所截部分的外侧。

十一、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上单调增加，且 $f(0) \ge 0$，$f(1) \le 1$，证明：$\exists \xi \in [0,1]$，使得 $f(\xi) = \xi^3$。

十二、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty]$ 上连续，$\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx$ 绝对收敛，证明：

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^{\sqrt{n}} f(\frac{x}{n})\varphi(x)dx = f(0)\int_0^{+\infty}\varphi(x)dx\text{。}$$

十三、设 $a_n > 0$，证明：

当下极限 $\lim_{n\to+\infty}\inf \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} > 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛；

当上极限 $\lim_{n\to+\infty}\sup \frac{\ln(1/a_n)}{\ln n} < 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 发散。