# 1999年东北大学线性代数与常微分方程考研试题



1. 计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

并把结果推广到 $n$ 阶情况．(10分)

2. 矩阵

<1> 已知 $AB=A+2E$，这里 $E$ 为单位阵，$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$

求 $A=$ ?

<2> 已知 $A\in R^{n\times n}$，$B\in R^{n\times n}$，$AB=0$，证明 $R(A)+R(B)\leq n$

这里 $R(\cdot)$ 是指 $(\cdot)$ 的秩．(共10分)



3. 试待定 $x$ 与 $y$，使 $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -4 \\ -2 & x & -2 \\ -4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ 相似．(10分)

4. 试确定 $b$ 为何值时，下述方程组有解，无解，在有解的情况下求出其全部解．

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

(10分)

5 试求出一正交相似变换阵T，使二次型

$$x_1^2+5x_2^2-x_3^2+4\sqrt{2}\,x_1x_3$$ (10分)

化为标准形.

6. 解下列方程 (15分)

1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{x^2y^3+xy}$

2. $\dfrac{2x}{y^3}dx+\dfrac{y^2-3x^2}{y^4}$

3. $x=yy'+a(y')^2$

7. (15分)

1. 设 $y'=y^2-x+1$ 的特解为 $y=x$，求其通解

2. $x^3y''-4x^2y'+10xy-12\int_0^x y(s)ds=x^3$ 的通解.



3. 求解

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&4\\1&0&-4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$$

8. (10分)

设 $f(x,y)$ 在区域G内连续，且满足

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\le F(|y_1-y_2|)$$

其中 $F(r)>0, r>0$ 的连续函数，且

$$\int_0^{r_1}\frac{dr}{F(r)}=\infty \quad (\text{常数 } r_1>0)$$

证明 微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

143

显然只有一个解.

9. (10分)

设微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(t)x_j \quad (i=1,2,\cdots,n) \qquad (*)$$

有一个非零解

$$\vec{\varphi}(t)=(\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)).$$

其中 $\varphi_n(t)\neq 0$.

证明：微分方程组(*)经下面变换

$$y_i=x_i-\frac{\varphi_i(t)}{\varphi_n(t)}x_n, \quad i=1,2,\cdots,n-1$$

$$y_n=\frac{1}{\varphi_n(t)}x_n$$

可化为关于 $n-1$ 个未知函数 $y_1,y_2,\cdots,y_{n-1}$ 的线性方程组，其只含 $n-1$ 个方程，且不含 $y_n$.