太原科技大学
2005 年研究生入学考试
高等代数试题

（可以不抄题，答题必须写在答题纸上）

一、（本题满分 20 分，每小题 10 分）

1. 证明 n 级范德蒙（Vandermonder）（ $n \geq 2$ ）行列式

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \cdots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & a_3^2 & \cdots & a_3^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$$

2. 设 $f(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$，用线性方程组的理论证明：若 $f(x)$ 有 $n+1$ 个不同的根，则 $f(x)$ 是零多项式。

二、（本题满分 20 分，每小题 10 分）

设 A 是一个 n 阶矩阵，且存在一个正整数 m 使得 $A^m = 0$

1. 证明 $I - A$ 可逆，并且

$$(I - A)^{-1} = I + A + \cdots + A^{m-1}$$

2. 求矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的逆矩阵

三、（本题满分 20 分，每小题 10 分）

1. 设 α, β, γ 线性无关，证明 $\alpha + \beta, \beta + \gamma, \gamma + \alpha$ 也线性无关。

2. 设向组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ ($r \geq 2$) 线性无关，任取 $k_1, k_2, \cdots, k_r \in F$，证明向量组 $\beta_1 = \alpha_1 + k_1 \alpha_r, \beta_2 = \alpha_2 + k_2 \alpha_r, \cdots, \beta_{r-1} = \alpha_{r-1} + k_{r-1} \alpha_r$ 也线性无关。

四、(本题满分16分)

设 W 是 R^n 的一个非零子空间,而对于 W 中的每一个向量 $(a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n)$ 来说,要么 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$,要么每一个 a_i 都不等于零,证明 $dimW = 1$。

五、(本题满分20分)

设 A 是一个正定矩阵,证明存在一个正定对称矩阵 S,使得 $A = S^2$。

六、(本题满分24分,每小题8分)

1. 令 $\mathbf{A}$ 是数域F上n维向量空间V的一个线性变换,并且满足 $\mathbf{A}^2 = \mathbf{A}$。证明:

1. $\ker(\mathbf{A}) = \{\xi - \mathbf{A}(\xi) \mid \xi \in V\}$

2. $V = \ker(\mathbf{A}) \oplus \mathrm{Im}(\mathbf{A})$

3. 如果 $\mathbf{B}$ 是V的一个线性变换,那么 $\mathrm{kre}(\mathbf{A}),\mathrm{Im}(\mathbf{A})$ 在 $\mathbf{B}$ 下不变的充要条件是 $\mathbf{AB} = \mathbf{BA}$。

七、(本题满分20分)

在n维线性空间中,设有线性变换 $\mathbf{A}$ 与向量 ξ 使得,$\mathbf{A}^{n-1}(\xi) \neq 0$,但 $\mathbf{A}^n(\xi) = 0$,求证 $\mathbf{A}$ 在某组基下矩阵是 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$

八、(本题满分10分)

证明,对任意实数 $a_1,a_2,\cdots,a_n$

$$\sum_{i=1}^{n} |a_i| \leq \sqrt{n(a_1^2 + a_2^2 + \cdots a_n^2)}$$