太原科技大学

2006年硕士研究生入学考试

《高等代数》试题

（可以不抄题，答题必须写在答题纸上）

一、（本题满分16分，每小题8分）

已知 V_1 是线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 + 7x_4 = 0 \\ 4x_1 + 11x_2 - 13x_3 + 16x_4 = 0 \end{cases}$$ 的解空间，

V_2 是线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 0 \\ 7x_1 - 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{cases}$$ 的解空间，

求：(1) $V_1 \cap V_2$ 的基与维数。

(2) $V_1 + V_2$ 的基与维数。

二、（本题满分10分）

求 λ - 矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+4 \\ 0 & 1 & \lambda+4 & 0 \\ 1 & \lambda+4 & 0 & 0 \\ \lambda+4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 的标准形。

三、(本题满分 15 分)

若 A 是正交矩阵,证明 A',A^{-1},A^* 都是正交矩阵。

四、(本题满分 12 分)

设 A 是 n 维线性空间 V 的一个线性变换,证明 A 的属于不同特征值的特征向量是线性无关的。

五、(本题满分 20 分)

已知 $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

求一正交矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形。

六、(本题满分 16 分,每小题 8 分)

设 A 为 n 阶实矩阵,$\mathbf{R}^n$ 为实数域上的 n 元列向量空间,$W = \{\beta \in \mathbf{R}^n \mid \alpha' A\beta = 0$,对一切 $\alpha \in \mathbf{R}^n$ 均成立$\}$

证:(1) 维(W) + 秩(A) = n

(2) W 为 $\mathbf{R}^n$ 的子空间。

七、(本题满分 15 分)

设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots; \alpha_m$ 是 n 维欧氏空间中 m 个向量,求证:$\alpha_1, \alpha_2, \cdots\cdots; \alpha_m$ 线性相关的充要条件是矩阵

$$A = \begin{pmatrix} (\alpha_1,\alpha_2) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m) \\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m) \end{pmatrix}$$ 的秩小于 m。

八、(本题满分 15 分)

设 A、B 都是正交矩阵,若 $|A| = -|B|$,证明 $|A + B| = 0$

九、(本题满分 15 分)

设 $AX = B$,且 n 阶矩阵 A、B 分别为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix},\quad 求 X$$

十、(本题满分 8 分)

证明对任意 n 阶矩阵 A、B 都有 $AB - BA \neq E$

十一、(本题满分 8 分)

设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = X'AX$ 是一个实二次型,有实 n 维向量 X 与 Y,使得

$X'AX > 0, Y'AY < 0$

试证:必存在实 n 维向量 $X_0 \neq 0$,使 $X'_0AX_0 = 0$