太原科技大学

2006年研究生入学考试

《数学分析》试题

说明：1、答题一律写在答题纸上，答在试卷上无效；

2、答题请写清题号，不必抄题。

一、填空题（每小题3分，共21分）

1、$\lim\limits_{x\to0}[1+3x]^{\frac{2}{\sin x}}=$______

2、$\lim\limits_{N\to\infty}\sum\limits_{n=1}^{N}\dfrac{1}{1+2\cdots+n}=$______

3、$\dfrac{d}{dx}\int_0^x\sin(x-t)^2\,dt=$______

4、直线$y=\sin x,0\le x\le\pi$，绕x轴旋转一周所得旋转体的体积等于__

5、$\int_0^{\pi}\dfrac{\sin(2n-1)x}{\sin x}dx(n\text{为任意整数})=$______

6、设周期为2π的函数$f(x)=\begin{cases}-1,-\pi<x\le0\\1+x^2,0<x\le\pi\end{cases}$，则$f(x)$的傅立叶级数在$x=\pi$处收敛于______

7、设椭圆$L:\dfrac{x^2}{2^2}+\dfrac{y^2}{10^2}=1$的周长为A，则$\oint_L(x^2+\dfrac{y^2}{5^2})ds=$______

二、计算题（每小题12分，共24分）

1、计算曲面积分$\oiint\limits_{\Sigma}(x-y)dxdy+(y-z)xdydz$，其中$\Sigma$为柱面$x^2+y^2=1$及平面$z=0,z=3$所围成的空间闭区域$\Omega$的整个边界曲面的外侧。

2、计算曲线积分$\oint_L(y^2+z^2)dx+(x^2+z^2)dy+(y^2+x^2)dz$，其中 L 为平面$x+y+z=1$与各坐标平面的交线，从z轴正向看它的方向为逆时针方向。

三、证明题（共 105 分）

1、（18 分）设 $f(x)$ 为 $[\frac{1}{2},1]$ 上的连续函数，证明：

（1）$\{x^n f(x)\}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上收敛；

（2）$\{x^n f(x)\}$ 在 $[\frac{1}{2},1]$ 上一致收敛的充要条件是 $f(1)=0$。

2、（15 分）设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上二阶可导，使 $f'(a)=f'(b)=0$。证明存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $$|f''(\xi)|\geq\frac{4}{(b-a)^2}|f(b)-f(a)|$$

3、（15 分）讨论广义积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}dx(p>0)$ 的收敛性。

4、（15 分）利用有限覆盖定理证明根的存在定理。

根的存在定理：若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，$f(a)f(b)<0$，则存在 $\xi\in(a,b)$ 使 $f'(\xi)=0$。

5、（15 分）证明：$f(x)=x^2$ 在[a,b]上一致连续，但在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致连续。

6、（15 分）设函数 $f(x,y)$ 在区域 $G(a<x<A,b<y<B)$ 内连续，函数 $\varphi(x)$ 在区间 (a,A) 内连续并且 $\varphi(x)$ 的值域包含于区间 (b,B)。证明：函数 $F(x)=f(x,\varphi(x))$ 在区间 (a,A) 内是连续的。

7、（12 分）设函数 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ 定义在[0，1]上，证明它在（0，1）上满足下述方程：

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\ln(1-x)=f(1)$$