2007 年太原科技大学硕士研究生入学考试

数学分析（601）试题

（可以不抄题、答案必须写在答题纸上）

一、填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1、设 $f(x)=(\frac{x-1}{1+x})^x$，则 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x+1)=$ ______

2、设幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 2，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n (x+1)^n$ 的收敛区间为______

3、设 $F(x)=\int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$，则 $F'(x)=$ ______

4、设 $u=\ln\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，则 $div(gradu)=$ ______

5、设 L 为曲线 $x^2+y^2=4$，则 $\int_L \sqrt{x^2+y^2}ds=$ ______

二、计算题（每小题 10 分，共 40 分）

1、设函数 $z=f(x,y)$ 在点（1，1）可微，且 $f(1,1)=1, \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_{(1,1)}=2, \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_{(1,1)}=3$，又设

$\varphi(x)=f(x,f(x,x))$，求 $\frac{d}{dx}\varphi^3(x)\Big|_{x=1}$。

2、计算曲面积分 $\iint\limits_{\Sigma}[(y-z)dydz+(z-x)dzdx+(x-y)dxdy]$，其中 Σ 为介于 $z=0$ 与 $z=h$ 之间锥面 $x^2+y^2=z^2$ 的下侧。

3、计算曲面 $(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2})^2=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}$ 所围立体的体积。

4、将 $f(x)=x^2(0\le x\le\pi)$ 展成余弦级数，并计算 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$

三、证明题（共 90 分）

1、（15 分）设 $f(x)$ 为 $(0,+\infty)$ 上的连续减函数，$f(x)>0$，证明数列

$$a_n=\sum_{k=1}^{n} f(k)-\int_1^n f(x)dx, n=1,2,\cdots$$

为收敛数列。

2、（30 分）设 $f(x)$ 在闭区间[a,b]连续，在开区间 (a,b) 内可导，且 $f'(x)>0$。若极限

$\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(2x-a)}{x-a}$ 存在，证明:

(1) 在 (a,b) 内 $f(x)>0$；

(2) 在 (a,b) 内存在点 ξ，使 $\dfrac{b^2-a^2}{\int_a^b f(x)dx}=\dfrac{2\xi}{f(\xi)}$；

（3）在 (a,b) 内存在与点 ξ 相异的点 η，使 $f'(\eta)(b^2-a^2)=\dfrac{2\xi}{\xi-a}\int_a^b f(x)dx$

3、（15 分）若函数 $f(x)$ 在闭区间[a,b]连续，证明函数 $f(x)$ 在[a,b]有界。

4、（15 分）证明：设 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 存在，证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续。

5、（15 分）设可微函数列 $\{f_n(x)\}$ 在[a,b]上收敛，$\{f_n'(x)\}$ 在[a,b]上一致有界，证明：$\{f_n(x)\}$ 在[a,b]上一致收敛。