

# 河北大学 2012 年硕士研究生入学考试试卷

卷别: [B]

适用专业	考试科目代码	考试科目名称
数学、计算数学	834	高等代数与解析几何

特别声明: 答案一律答在答题纸上, 答在本试卷纸上无效。

## 第一部分

### 一、 (10 分)

在  $F^3$  中定义线性变换  $\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + 2x_3, 2x_2 + x_3, -x_1 + x_2 + 3x_3)$ , 试求  $\sigma$  的特征值和特征向量。

### 二、 (10 分)

证明:  $n$  维线性空间  $V$  的任意一个真子空间都是若干个  $n-1$  维子空间的交。

### 三、 (20 分)

设  $f(\alpha, \beta)$  是数域  $F$  上线性空间  $V$  上对称双线性函数, 与它对应的二次齐次函数记为  $p(\alpha)$ ,  $p(\alpha) = f(\alpha, \alpha)$ 。

$$\text{证明 (1) } f(\alpha, \beta) = \frac{1}{2}[p(\alpha + \beta) - p(\alpha) - p(\beta)];$$

$$(2) f(\alpha, \beta) = \frac{1}{4}[p(\alpha + \beta) - p(\alpha - \beta)].$$

### 四、 (15 分)

设实二次型  $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = X'AX$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  是  $A$  的特征根, 且  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_n$ 。

证明: 对任意  $X \in R^n$  有  $\lambda_1 X'X \leq X'AX \leq \lambda_n X'X$ 。

### 五、 (20 分)

令  $\Psi$  是  $n$  维线性空间  $V$  的线性变换, 证明下列命题等价:

- (1)  $\Psi$  是可逆变换;
- (2)  $\Psi$  关于  $V$  的某一组基的矩阵  $A$  的秩为  $n$ ;
- (3)  $\text{Ker}(\Psi)$  维数为零。

# 河北大学 2012 年硕士研究生入学考试试卷

卷别: [B]

适用专业	考试科目代码	考试科目名称
数学、计算数学	834	高等代数与解析几何

特别声明: 答案一律答在答题纸上, 答在本试卷纸上无效。

## 第二部分

一、(10 分) 在复数域上求多项式  $f(x) = x^4 + 2x^2 + 9$  与  $g(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 9$  的公共根。

二、(15 分) 证明:  $n$  阶行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & & \\ 1 & 2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 & 2 & 1 \\ & & & & 1 & 2 \end{vmatrix} = n+1.$$

三、(20 分) 在空间直角坐标系中, 直线  $l_1, l_2$  的方程分别为  $\frac{x}{1} = \frac{y-2}{1} = \frac{z+2}{-1}$ ,

$\frac{x+1}{-1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{3}$ , (1) 求两条直线的公垂线方程 (10 分); (2) 求过公垂线且平行与

$\vec{v} = \{1, 0, 1\}$  的平面方程。(10 分)

四、(15 分) 设曲线方程为  $\begin{cases} x^2 - 2z + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$ , (1) 求此曲线在  $xoy$  平面上的射影柱面方程,

(5 分); (2) 求顶点在坐标原点, 且以此曲线为准线的锥面方程。(10 分)

五、(5 分) 求二次曲面  $x^2 + y^2 + z^2 - 4xy - 4xz - 4yz - 3 = 0$  的中心。

六、(10 分) 求椭球面  $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} + \frac{z^2}{9} = 1$  被点  $(1, 1, 1)$  平分的弦所在直线的方程。