2006年硕士研究生入学复试试题

科目：常微分方程　　　　　　共 1 页 第 1 页

每题10分，共100分.

1. 解方程 $(1+e^{\frac{x}{y}})dx+e^{\frac{x}{y}}(1-\frac{x}{y})dy=0$

2. 解方程 $y'=\dfrac{\cos x\sin y-\tan x}{\sin x\cos y}$

3. 解方程 $\dfrac{x}{x^2+y^2}dy=(\dfrac{y}{x^2+y^2}-1)dx$

4. 利用积分因子法解方程 $(x-y^2)dx+y(1+x)dy=0$

5. 利用比较系数法解方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=\sin t-\cos 2t$

6. 利用常数变易法解方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-3\dfrac{dx}{dt}+2x=\sin e^{-t}$

7. 已知方程组 $x'=Ax$，$A=\begin{bmatrix}2&3\\-3&2\end{bmatrix}$. 求得A的特征值为 $\lambda_1=2+3i$ 和 $\lambda_2=2-3i$，相应的特征向量为 $v_1=\begin{bmatrix}1\\i\end{bmatrix}$ 和 $\begin{bmatrix}i\\1\end{bmatrix}$，求方程组的一个基解矩阵，并求出矩阵指数 $\exp At$.

8. 一曲线通过(2,0)点，且其上任意点的切点到纵坐标轴间的切线有定长2. 试列出曲线方程所满足的微分方程，并解方程求曲线的方程

9. 已知 $x_1(t)$、$x_2(t)$，…，$x_n(t)$（$a\le t\le b$）为n阶齐次线性微分方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+a_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+a_n(t)x=0$$

的线性无关解，证明伏朗斯基行列式 $W(t)\neq 0$ $(a\le t\le b)$.

10. 已知初值问题 $\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=f(x,y)\\ y(x_0)=y_0\end{cases}$. 其中 $f(x,y)$ 在 $R=\left\{(x,y)\,\middle|\,\begin{array}{l}|x-x_0|\le a\\ |y-y_0|\le b\end{array}\right\}$ 上连续且关于y满足利普希兹条件. 试：

1) 写出与初值问题等价的积分方程求解问题.

2) 现已证明在 $x_0\le x\le x_0+a$ 上解存在，下面在 $L\cdot a<1$ 的条件下，证明解是唯一的（L是利普希兹常数）