2006年硕士研究生入学复试试题

科目： 概率论与数理统计　　共 1 页 第 1 页

一. 填空（每小题5分，共30分）

1. 设随机变量 X 和 Y 相互独立，且均服从 $[0, 3]$ 上的均匀分布，则 $P\{man(X, Y) \le 1\} =$ ________；

2. 从 1、2、3、4 中任取一个数，记为 X，再从 $1, \cdots, X$ 中任取一个数，记为 Y，则 $P\{Y = 2\} =$ ________；

3. 设随机变量 X 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P\left\{X > \sqrt{DX}\right\} =$ ________；

4. 设随机变量 X 的方差为 2，则根据切比雪夫不等式有估计 $P\{|X - EX| \ge 2\} \le$ ______；

5. 设随机变量 X 和 Y 的相关系数为 0.5，$EX = EY = 0, EX^2 = EY^2 = 2$，则 $E(X+Y)^2 =$ ______；

6. 设随机变量 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立，且都服从参数为 1 的泊松分布，则 $\sum_{i=1}^{n} X_i$ 一定服从 ______ 分布，其分布参数为 ______；

二~八题每题10分，共70分

二. 设在一个盒子中有 50 张彩票，其中只有 1 张奖票，50 人排队依次抽奖，抽后不放回，求第 1、2、3 人中奖的概率。

三. 设随机变量 X 在 $[-\pi, \pi]$ 上服从均匀分布，求 $Y = cos\, X$ 的概率密度 $f_Y(y)$。

四. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} 6 & x^2 \le y \le x \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，求边缘概率密度 $f_X(x), f_Y(y)$。

五. 设随机变量 (X, Y) 具有概率密度 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y) & 0 \le x \le 2, 0 \le y \le 2 \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$，求 DX, DY，协方差 $cov(X, Y)$，相关系数 ρ_{XY}。

六. 证明：若随机变量 X 的特征函数为 $\varphi(t) = \dfrac{e^{jt}\left(1 - e^{jnt}\right)}{n\left(1 - e^{jt}\right)}$，其中 $j = \sqrt{-1}$，则 X 以概率 $\dfrac{1}{n}$ 取值 1，2，$\cdots, n$。

七. 设随机变量 X 的母函数为 $\psi(s)$，$q_n = P\{X \le n\}$，$n = 0, 1, 2, \cdots$，求 q_n 对应的母函数。

八. 设 $\{\xi_n\}$ 为一随机序列，数学期望 $E(\xi_n)$ 存在，令 $\eta_n = \dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \xi_i$，若 $\lim\limits_{n \to \infty} [\eta_n - E(\eta_n)] = 0 \quad (P)$，则称 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。设 $\xi_n \ (n = 1, 2, \cdots)$ 为相互独立的随机序列，$P\{\xi_n = 1\} = p_n, P\{\xi_n = 0\} = q_n$，其中 $q_n = 1 - p_n$，证明 $\{\xi_n\}$ 服从大数定律。