2006年硕士研究生入学复试试题

科目：数值分析　　　　　　共 1 页 第 1 页

一.（18分）

设$x_0,x_1,\cdots,x_n$为$n+1$个互异的插值节点，$l_i(x)(i=0,1,\cdots,n)$为 *Lagrange* 插值基函数，证明：

$$1)\sum_{i=0}^{n} l_i(x)=1,\qquad 2)\sum_{i=0}^{n} l_i(0)x_i^k=\begin{cases}0, & k=1,2,\cdots,n\\(-1)^n x_0x_1\cdots x_n, & k=n+1\end{cases}$$

二、（17分）

设$f(x)=e^x$在$[-1,1]$上的插值极小化近似最佳逼近多项式为 $L_n(x)$，若$\|f-L_n\|_\infty$有界，证明对任何$n\ge1$，存在常数α_n,β_n，使

$$\alpha_n\left|T_{n+1}(x)\right|\le\left|f(x)-L_n(x)\right|\le\beta_n\left|T_{n+1}(x)\right|$$

三、（17分）

求函数$y=arctgx$在$[0,1]$上的一次最佳平方逼近多项式。

四、（18分）

求*Gauss* 型求积公式

$$\int_0^1\sqrt{x}f(x)dx=A_0f(x_0)+A_1f(x_1)$$

的系数A_0，A_1 及节点x_0，x_1。

五、（15分）

方程组$Ax=b$，其中$A\in R^{n\times n}$，A是对称的且非奇异。设A有误差σA，则原方程组的变化为$(A+\sigma A)(x+\sigma x)=b$

其中σx 为解的误差向量，试证明：

$$\frac{\|\sigma x\|_2}{\|x+\sigma x\|_2}\le\left|\frac{\lambda_1}{\lambda_n}\right|\frac{\|\sigma A\|_2}{\|A\|_2}$$

其中λ_1 和 λ_n 分别为A的按模最大和最小的特征值。

六、（15分）

设方阵A的特征值都是实数，满足条件$\lambda_1\succ\lambda_2\ge\lambda_3\ge\cdots\ge\lambda_n$

试证：为求λ_1而进行原点平移，取 $p=\frac{1}{2}(\lambda_n+\lambda_2)$时，幂法收敛最快。