2007年硕士研究生入学考试试题

科目名称：　高等代数　　共2页　第1页

请将试题做在答题纸上，在题签上做题无效。

一．填空（共5个小题，每小题5分，共25分）

（1）　设矩阵$A=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，矩阵$B$满足$ABA^*=2BA^*+E$，其中$A^*$是$A$的伴随矩阵，$E$为三阶单位矩阵，则$|B|=$ ______；

（2）　二次型$f=(x_1+x_2)^2+(x_2-x_3)^2+(x_3+x_1)^2$的秩是 ______；

（3）　设A、B都是n阶正交矩阵，且$|A|=1,|B|=-1$，则$|A+B|=$ ______；

（4）　设A,B,C均为n阶方阵，且$|E-A|\neq 0$；若$B=E+AB$，$C=A+CA$，则$B-C=$ ______；

（5）　设有n维向量$\alpha=(a,0,\cdots,0,a)^T,a<0,E$为$n$阶单位矩阵，$A=E-\alpha\alpha^T,B=E+\frac{1}{a}\alpha\alpha^T$，其中$A$的逆矩阵为$B$，则$a=$ ______。

二．单项选择（共5个小题，每小题5分，共25分）

（1）设有向量组$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$均为$n$维列向量，$A$是$m\times n$矩阵，下列选项正确的是（　）

(A)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(B)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性相关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

(C)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性相关

(D)若$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$线性无关，则$A\alpha_1,A\alpha_2,\cdots,A\alpha_s$线性无关

（2）设A为三阶方阵，将A的第2行加到第1行得B，再将B的第1列的-1倍加到第二列得C，记$P=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，则（　）

(A) $C=P^{-1}AP$,　(B) $C=PAP^{-1}$,　(C) $C=P^TAP$,　(D) $C=PAP^T$；

（3）设有齐次线性方程组$AX=\mathbf{0}$和$BX=\mathbf{0}$，其中A与B均为$m\times n$矩阵，$r(A)$为A的秩，现有4个命题：

（a）若$AX=\mathbf{0}$的解均为$BX=\mathbf{0}$的解，则$r(A)\geq r(B)$，

（b）若$r(A)\geq r(B)$，则$AX=\mathbf{0}$的解均为$BX=\mathbf{0}$的解

（c）若 $AX=\mathbf{0}$ 与 $BX=\mathbf{0}$ 同解，则 $r(A)=r(B)$，（d）若 $r(A)=r(B)$，则 $AX=\mathbf{0}$ 与 $BX=\mathbf{0}$ 同解

以上命题正确的是（　）

(A) $(a),(b)$,　(B) $(a),(c)$,　(C) $(b),(d)$,　(D) $(c),(d)$

（4）　设 A、B、C 均为 n 阶方阵，且 $AB=BC=CA=E$，其中 E 为单位矩阵，则 $A^2+B^2+C^2$ 为（　）

(A) $3E$,　(B) $2E$,　(C) E,　(D) O。

（5）　设 $A,B,A+B,A^{-1}+B^{-1}$ 均为 n 阶可逆矩阵，则 $(A^{-1}+B^{-1})^{-1}$ 为（　）

(A) $A^{-1}+B^{-1}$,　(B) $A+B$,　(C) $A(A+B)^{-1}B$,　(D) $(A+B)^{-1}$

三.　(10 分)设 A、B 均为 n 阶方阵，且 $E+AB$ 可逆，证明：$E+BA$ 可逆，并求其逆。

四.　(12 分)设 n 阶非奇异矩阵 A 中各行元素之和均为 c,证明 $c\neq 0$，且 A^{-1} 中各行元素之和均为 c^{-1}。

五.　(15 分)已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3+bx_4=1 \end{cases}$$

有三个线性无关的解

（1）　证明方程组系数矩阵 A 的秩 $r(A)=2$；　（2）求 a、b 的值及方程组的通解。

六.　(12 分)设　$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 n 维实内积空间 V 的一组基，对于任何 $\alpha,\beta\in V$,

$$\alpha=x_1e_1+x_2e_2+\cdots+x_ne_n,\ \beta=y_1e_1+y_2e_2+\cdots+y_ne$$

定义内积　　$(\alpha,\beta)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$

证明：$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 n 维实内积空间 V 的一组标准正交基

七.　(12 分)设 A 为 n 阶正定矩阵，E 是 n 阶单位矩阵，证明 A+E 的行列式大于 1。

八.　(14 分)已知三阶实对称矩阵 A 有三个特征值 1、1、-2，其对应 -2 的特征向量为 $\xi_3=(1,-1,-1)^T$，求矩阵 A。

九.　(12 分) 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 是 $AX=\mathbf{0}$ 的基础解系，β 不是方程组的解，证明：$\beta+\alpha_1,\beta+\alpha_2,\cdots,\beta+\alpha_t$, 线性无关。

十.　(13 分)设 A 为奇数阶（2n+1 阶）正交矩阵，若 $|A|=1$，证明：矩阵 A 必有特征值 1。