# 2007年硕士研究生入学考试试题

科目名称：　　数学分析　　　　共2页　第1页

1. 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{1+p}}, (p\neq -1)$．　　（11分）

2. 设$a$为一个常数，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_n^{n+a} x\sin\dfrac{1}{x}dx$．　　（11分）

3. 设$a_i\geq 0\ \ (i=0,1,2,\cdots)$，$A_n=a_0+a_1+\cdots+a_n$，试证：若$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=\infty$且$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{A_n}=0$，

则级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n x^n$的收敛半径$r=1$．　　(12分)

4. 设$f(x)=a_1\sin x+a_2\sin 2x+\cdots+a_n\sin nx$，且$|f(x)|\leq|\sin x|$，其中$a_1, a_2, \cdots a_n$

为实常数.求证 $|a_1+2a_2+\cdots+na_n|\leq 1$.　　（11分）

5. 计算$I=\iint\limits_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$，　　(11分)

6. 已知$f(x)$在$(a,b)$上一致连续,证明$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$存在.　　(12分)

7. 作函数$y=\dfrac{\ln x}{x}$的图形.说明单调区间，极值点，凹凸区间，拐点及渐近线.　　(12分)



8. 设$u=u(x,y), v=v(x,y)$的一阶偏导数连续且满足条件：$F(u,v)=0$及

$(\dfrac{\partial F}{\partial u})^2+(\dfrac{\partial F}{\partial v})^2>0$，求证：$\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=0$　　（12分）

9. 求曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}(x^2+y^2+z^2)ds$. 其中$\Sigma: x^2+y^2+z^2=2ax.$　　（12分）

10. 计算$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\dfrac{1+a\cos x}{1-a\cos x}\right)\dfrac{dx}{\cos x}$.　　$(|a|<1)$　　(12分)

11. 设$x_0=a, x_1=b, x_n=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}+x_{n-2}), n\geq 2$.求证：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在并求该极限.　　(12分)

12．设 $f(x)\in c[1,+\infty)$，且 $f(x)>0, f(x)$ 单调递减.令 $a_n=\sum_{k=1}^{n}f(k)-\int_1^n f(x)dx$

求证：数列 $\{a_n\}$ 收敛. (12 分)

13．设正项级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ 发散，记 $s_k=a_1+a_2+\cdots+a_k$.试证 (10 分)

（1）级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{s_k}$ 也发散.

（2）但对任意 $\sigma>0$，级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{s_k^{1+\sigma}}$ 却收敛.