

912 《数值分析》 试题

一、(15 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - 2x^2 + 3x + 1$, 求函数 $g(x)$ 使其函数值与 $f(x)$ 的函数值在 $x=1, 2, 3$ 相同。并证明 $\int_1^3 f(x)dx = \int_1^3 g(x)dx$ 。

二、(15 分)

求满足下列条件的插值多项式, 并写出插值余项。

x	0	1
$f(x)$	1	1
$f'(x)$	-1	7
$f''(x)$	0	

三、(15 分)

求函数 $f(x) = \sqrt{x}$ 在 $\left[\frac{1}{4}, 1\right]$ 上的一次最佳平方逼近多项式, 其中 $\Phi = \text{span}\{1, x\}$ 。

四、(15 分)

确定下面求积公式中的待定参数, 使其代数精度尽量高。并指出其所具有的代数精度

$$\int_{-h}^h y(x)dx \approx h(a_{-1}y_{-1} + a_0y_0 + a_1y_1) + h^2(b_{-1}y'_{-1} + b_0y'_0 + b_1y'_1)$$

五 (15 分)

用梯形法解初值问题 $\begin{cases} y' + y = 0 \\ y(0) = 1 \end{cases}$, 证明其近似解

为 $y_n = \left(\frac{2-h}{2+h}\right)^n$, 并证明当 $h \rightarrow 0$ 时, 它收敛于原初值问题的准确解 $y = e^{-x}$ 。

六、(15 分)

设有解方程 $12 - 3x + 2\cos x = 0$ 的迭代法 $x_{n+1} = 4 + \frac{2}{3}\cos x_n$

(1) 证明对 $\forall x_0 \in R$ 均有 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x^*$

(2) 此迭代的收敛阶是多少?

七、(10 分)

用矩阵的直接三角 (LU) 分解法解下面方程组

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$