

2010 年硕士研究生复试考试试题

科目代码: 913 科目名称: 常微分方程 共 2 页

注: 请将试题做在标准答题纸上, 在答题签上做题无效。

一、单项选择题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1、考虑线性系统 $dx/dt = A(t)x$, 其中 $A(t)$ 是 $n \times n$ 实矩阵函数, $t \in R, x \in R^n$, 其所有的解构成一个_____。

A n 维线性空间 B n^2 维线性空间 C 无穷维线性空间 D 不是线性空间

2、考虑 Cauchy 问题 $dx/dt = A(t)x, x(t_0) = x_0$, 其中 $A(t)$ 是 $n \times n$ 实矩阵函数, $t \in R, x \in R^n$,

设 $X(t)$ 是其基本解矩阵, 若 C 是 $n \times n$ 实矩阵, $X(t)C$ 也是基本解矩阵的条件是_____。

A C 非零 B C 可逆 C C 可对角化 D C 对称

3. $f_y'(x, y)$ 连续是方程 $dy/dx = f(x, y)$ 初值解唯一的_____条件。

A 必要 B 必要非充分 C 充分必要 D 充分

4、方程 $dy/dx = y^2$ 通过点 $(3, -1)$ 的解的最大存在区间是_____。

A $(2, +\infty)$ B $(0, +\infty)$ C $(-\infty, +\infty)$ D $(-\infty, 3)$

5、方程 $y'' - y' = (1+x)\sin x + x^2$ 的解形式为_____。

A $y(x) = c_1 + c_2 e^x + (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x + (ax^2 + bx + c)$

B $y(x) = c_1 + c_2 e^x + (Ax+B)\sin x + (ax^2 + bx + c)$ C $y(x) = c_1 + c_2 e^x + (Ax+B)\sin x + Cx^2$

D $y(x) = c_1 + c_2 e^x + (Ax+B)\sin x + (Cx+D)\cos x + x(ax^2 + bx + c)$

二、填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

1、一阶常微分方程的 Cauchy 问题 $\begin{cases} \frac{dy}{dx} = f(x, y) \\ \varphi(x_0) = y_0 \end{cases}$, 其中 $f(x, y)$ 定义在矩形域

$R: -a \leq x - x_0 \leq a, -b \leq y - y_0 \leq b$ 上, 其解的存在唯一性定理的条件为_____。

存在唯一解的存在区间为 $x_0 - h \leq x \leq x_0 + h$, 其中 $h = \min\left(a, \frac{b}{M}\right)$,

$M = \max_{(x,y) \in R} |f(x, y)|$ 。

2、解线性方程的常用方法有_____、_____、_____、_____。

3、若 $\Phi(t)$ 是 $x' = A(t)x$ 的基解矩阵, 则向量函数 $\varphi(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $x' = A(t)x + f(t)$ 的满足

初始条件 $\varphi(t_0) = 0$ 的解; 向量函数 $\varphi(t) = \underline{\hspace{2cm}}$ 是 $x' = A(t)x + f(t)$ 的满足初始条件

$\varphi(t_0) = \eta$ 的解。

4、形如 $\underline{\hspace{2cm}}$ 的方程称为欧拉方程。

5、方程 $\frac{dy}{dx} = x + y^2$ 通过点 $(0, 0)$ 的第三次近似解为 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

三、求出下列方程 (组) 的通解 (共 28 分)

1、(8 分) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{xy + x^3 y^3}$

2、(8 分) $e^x dx + (e^x \operatorname{ctg} y + 2y \cos y) dy = 0$

3、(12 分)
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -x + y + z \\ \frac{dy}{dt} = x - y + z \\ \frac{dz}{dt} = x + y - z \end{cases}$$

四、(8 分) 用拉普拉斯变换解初值问题 $x'' + 2x' + x = e^{-t}, x(0) = x'(0) = 0$ 。

五、(8 分) 求一曲线族, 使它的切线介于坐标轴间的部分被切点分成相等的两部分。

六、(16 分) 证明线性齐次微分方程组 $x' = A(t)x$ 最多有 n 个线性无关的解, 其中 $A(t)$ 是定义在区间 $a \leq t \leq b$ 上的 $n \times n$ 的连续矩阵函数。