2010年硕士研究生入学初试试题

科目代码名称： 708 数学分析 共1页 第1页

注：本题签上答题无效，请在答题纸上答题。答题请写清题号，不必抄题。共13题，满分150分。

一、求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}}{x}$ （本题10分）

二、设 $\alpha>0$，计算 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x}\sin x\,\mathrm{d}x$（本题10分）

三、设 $f(x)=\begin{cases}x^2 & x\text{为有理数}\\ -x^2 & x\text{为无理数}\end{cases}$，详述 $f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？是否可导？（本题10分）

四、设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 可导，$f'(a)<0$，$f'(b)>0$，证明存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=0$。（本题12分）

五、设 $x>-1$ 时，可微函数 $f(x)$ 满足方程 $f'(x)+f(x)-\dfrac{1}{x+1}\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=0$ 及初始条件 $f(0)=1$，

证明：$x\ge 0$ 时，$\mathrm{e}^{-x}\le f(x)\le 1$。（本题12分）

六、设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 可微，且满足条件 $f(1)=2\int_0^{\frac{1}{2}}xf(x)\,\mathrm{d}x$，证明：存在 $\xi\in(0,1)$，使 $f(\xi)+\xi f'(\xi)=0$。

（本题12分）

七、求摆线 $\begin{cases}x=t-\sin t\\ y=1-\cos t\end{cases}$ $t\in[0,2\pi]$ 与 x 轴所围图形的面积。（本题12分）

八、设数列 $\{a_n\}$ 单调趋于0，证明：对于一切实数 x，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\sin nx$ 收敛。（本题12分）

九、利用幂级数的性质求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n2^n}$ 的和。（本题12分）

十、设 $u=f(x,y,z)$ 有连续偏导数，$y=y(x)$ 与 $z=z(x)$ 分别由方程 $\mathrm{e}^{xy}-y=0$ 与 $\mathrm{e}^{z}-xz=0$ 所确定，

求 $\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$。（本题12分）

十一、已知 $0<a<b$，$0<p<q$，求双曲线 $xy=p,xy=q$ 与直线 $y=ax,y=bx$ 在第一象限所围成的图形的面积。（本题12分）

十二、求 $\iint\limits_{\Sigma}x^3\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，$\Sigma$ 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\ge 0)$ 上侧。

（本题12分）

十三、利用 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$ 计算含参变量反常积分 $I(x)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\,\mathrm{d}t$。（本题12分）