download.kaoyan.com

2010年硕士研究生入学初试试题

注：本试卷共2页、12题，满分150分，答题时间3小时．请把试题按序号做在答题纸上，做在题签上无效．

1.（6分）设$f(x)$，$g(x)$是数域P上的两个一元多项式，且$f^2(x)\mid g^2(x)$，证明：$f(x)\mid g(x)$．

2.（14分）设$f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$，$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$，求$u(x)$，$v(x)$使等式$(f,g)=uf+vg$成立，其中$(f,g)$表示$f(x)$，$g(x)$的首项系数为1的最大公因式．

3.（10分）计算4级行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta \\ 0 & 0 & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

4.（12分）设矩阵A，B满足$A^*BA=2BA-8E$，其中

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A^*是A的伴随矩阵，E是单位矩阵，求矩阵B．

5.（22分）λ取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1+\lambda x_2-x_3=1 \\ \lambda x_1-x_2+x_3=2 \\ 4x_1+5x_2-5x_3=-1 \end{cases}$$

无解，有唯一解或有无穷多解？并在有无穷多解时，求出方程组的通解．

6.（12分）求一个3级实对称矩阵A，使其特征值为1，1，-1，并且对应特征值1有特征向量$(1,1,1)^T$和$(2,2,1)^T$，其中α^T为α的转置．

7.（24分）给定P^3（P是一个数域）的两组基：$\varepsilon_1=(1,0,1)$，$\varepsilon_2=(2,1,0)$，$\varepsilon_3=(1,1,1)$和$\eta_1=(1,2,-1)$，$\eta_2=(2,2,-1)$，$\eta_3=(2,-1,-1)$，定义线性变换σ：$\sigma(\varepsilon_i)=\eta_i$，$i=1,2,3$

(1) 求由基ε_1，ε_2，ε_3到基η_1，η_2，η_3的过渡矩阵；

(2) 求σ在基ε_1，ε_2，ε_3下的矩阵；

(3) 设$\alpha=(1,0,0)$，求$\sigma(\alpha)$在基ε_1，ε_2，ε_3下的坐标．

download.kaoyan.com

8. （10分）设一个n元实二次型的秩等于2且符号差等于0，或者秩等于1，则它可以分解为两个实系数的一次齐次多项式的乘积.

9. （10分）设σ是有限维线性空间V的线性变换，W为V的子空间，则

$$\dim\sigma(W)+\dim(\ker\sigma\cap W)=\dim W$$，其中$\dim W$表示W的维数.

10. （10分）设σ是n维欧氏空间V的对称变换，则σ的值域$\sigma(V)$是σ的核$\ker\sigma$的正交补.

11. （8分）设$(\lambda-1)(\lambda+2)^2$为5级矩阵A的最小多项式，求A的所有可能的若尔当标准形.

12. （12分）设

$$A=\begin{bmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{bmatrix}$$

求：矩阵A的不变因子，初等因子，有理标准形.