# 2011年硕士研究生入学初试试题

科目代码：702　　科目名称：数学分析

注：(1) 本试题共 1 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

一、设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，按“$\varepsilon-N$”定义证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$。　（12分）

二、求极限 1. $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{x^{\sin x}-1}{x^x-1}$。　2. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{e^{-x^2}}{x}\int_0^x t^2e^{t^2}dt$　（12分每小题6分）

三、证明：$\dfrac{\pi}{2}=\cos\dfrac{\pi}{4}\cdot\cos\dfrac{\pi}{8}\cdots\cdots\cos\dfrac{\pi}{2^n}\cdots\cdots$。　（12分）

四、设 $m$ 为自然数，在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义 $f(x)=\begin{cases}x^m\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq o\\ 0, & x=0\end{cases}$，

问 $m$ 为何值时（1）$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导？　（2）$f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续？

（3）$f''(0)$ 存在？　（12分）

五、若 $p>1$，则对于 $[0,1]$ 内的任意 $x$ 有：$1\geq x^p+(1-x)^p\geq\dfrac{1}{2^{p-1}}$。　（12分）

六、设 $w=f(x^2+y^2+z^2,xyz)$，$f$ 具有二阶连续偏导数，计算 $\dfrac{\partial w}{\partial x}$，$\dfrac{\partial^2 w}{\partial z\partial x}$。（12分）

七、计算 $\iint\limits_D e^{\frac{x-y}{x+y}}dxdy$，$D$ 是由直线 $x+y=2$ 及 $x=0$、$y=0$ 所围成的区域。（12分）

八、计算 $\int_L(y^2-z^2)dx+(z^2-x^2)dy+(x^2-y^2)dz$，其中 $L$ 是用平面 $x+y+z=\dfrac{3}{2}$ 截立方体 $0\leq x,y,z\leq1$ 的表面所得的截痕，从 $x$ 轴的正向看去是逆时针方向。　（12分）

九、求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{(n+1)!}$ 的和。　（15分）

十、利用 $\int_0^{+\infty}e^{-t^2}dt=\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}$，计算 $I(x)=\int_0^{+\infty}e^{-t^2}\cos2xtdt$。　（15分）

十一、$f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，$f(1)=1$，证明：

1.存在 $\xi\in(0,1)$，及对任意的正数 $\lambda$ 使 $(\xi-1)f'(\xi)+\lambda f(\xi)=0$；

2.存在 $\eta\in(0,1)$，使 $f'(\eta)=\dfrac{1}{2010}$。　（12分）

十二、函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 二阶可导，$f(\dfrac{1}{2})=0$，$\sup\limits_{x\in[0,1]}|f''(x)|\leq3$

证明：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right|\leq\dfrac{1}{8}$。　（12分）