2011 年硕士研究生入学初试试题

科目代码：817　　科目名称：高等代数

注：(1) 本试题共 2 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

1.（6 分） 设 $f(x)$ 为次数大于零的首相系数为 1 的多项式，则 $f(x)$ 是一个不可约多项式的方幂的充分必要条件为：对任意多项式 $g(x)$ 必有 $(f(x),\ g(x))=1$ 或对某一正整数 m，$f(x)\,|\,g^m(x)$.

2.（12 分） 设 $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$，$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$，

（1）求 $(f(x),\ g(x))$；（2）求 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的公共实根.

3.（10 分） 计算 4 级行列式

$$D_4=\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha & 0 & 0 \\ \beta & \alpha+\beta & \alpha & 0 \\ 0 & \beta & \alpha+\beta & \alpha \\ 0 & 0 & \beta & \alpha+\beta \end{vmatrix}$$

4.（6 分） 设 4 维列向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$，令 $A=[\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4]$，且方程组 $Ax=0$ 的通解为 $x=k(1,0,1,0)^{\mathrm{T}}$（$k$ 为任意常数），求向量组的极大无关组.

5.（16 分） 设 $A=\begin{bmatrix} \lambda & 1 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 0 \\ 1 & 1 & \lambda \end{bmatrix}$，$\beta=\begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$，已知线性方程组 $Ax=\beta$ 有两个不同的解，

（1）求 λ，a 的值；（2）求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

6.（6 分） 设 n 级方阵 A 满足 $A^2-3A+2E=O$，证明：A 相似于一个对角矩阵.

7.（16 分） 已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2，（1）求 a 的值；（2）求正交变换 $x=Qy$，把该二次型化为标准形；（3）说明该二次型是否正定.

8. （**8 分**）设 A 为 3 级实对称矩阵，且满足 $A^2+2A=O$，已知 A 的秩 $r(A)=2$，

（1）求 A 的全部特征值；（2）当 k 为何值时，矩阵 $A+kE$ 为正定矩阵，其中 E 为 3 级单位矩阵.

9.（**18 分**）设 $V_1=L(\alpha_1,\alpha_2)$，$V_2=L(\beta_1,\beta_2)$，$W_1=V_1\cap V_2$，$W_2=V_1+V_2$，

其中 $\begin{cases}\alpha_1=(1,\ 2,\ 1,0)\\ \alpha_2=(-1,1,1,1)\end{cases}$，$\begin{cases}\beta_1=(2,\ -1,\ 0,\ 1)\\ \beta_2=(1,\ -1,\ 3,7)\end{cases}$

（1）求 W_1 在 R^4 中的正交补 W_1^{T}；（2）求 W_2 的一组基，并扩充成 R^4 的一组基.

10.（**20 分**）在 $V=P^3$ 中，变换 σ 定义如下

$$\begin{cases}\sigma\eta_1=(-5,\ 0,3\ )\\ \sigma\eta_2=(\ 0,-1,\ 6\ ),\\ \sigma\eta_3=(-5,-1,9)\end{cases}\qquad \text{其中}\begin{cases}\eta_1=(-1,0,2\ )\\ \eta_2=(\ 0,\ 1,\ 1)\\ \eta_3=(3,-1,0)\end{cases}$$

（1）求 σ 在基 η_1，η_2，η_3 下的矩阵；（2）求值域 σV 与核 $\sigma^{-1}(0)$.

11.（**10 分**）（1）设 λ_1，λ_2 是线性变换 σ 的两个不同特征值，ε_1，ε_2 是分别属于 λ_1，λ_2 的特征向量，证明：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 σ 的特征向量；（2）证明：如果线性空间 V 的线性变换 σ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 σ 是数乘变换.

12.（**16 分**）设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}0 & 3 & 3\\ -1 & 8 & 6\\ 2 & -14 & -10\end{bmatrix}$$

（1）求 A 的不变因子，初等因子，最小多项式；（2）求 A 的若尔当标准形，有理标准形.

13.（**6 分**）求证；欧氏空间 V 中保持内积不变的变换 σ 是正交变换.