2011 年帧士研究生入学考试复试试题

科目代码：926　　科目名称：常微分方程

注：（1）本试题共 1 页。

（2）请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

一、解方程（每小题 10 分，共 50 分）

1. 求方程 $(x+1)\dfrac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$ 的通解，这里 n 为常数。

2. 求方程 $(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$ 的通解。

3. 求方程 $(\dfrac{dy}{dx})^3+2x\dfrac{dy}{dx}-y=0$ 的解。

4. 利用比较系数法求方程 $\dfrac{d^2x}{dt^2}-2\dfrac{dx}{dt}-3x=e^{-t}$ 的通解。

5. 求方程 $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$ 的通解。

二、（8 分）求方程 $\dfrac{d^2y}{dx^2}-2x\dfrac{dy}{dx}-2y=2$ 满足 $y(0)=0,\ y'(0)=1$ 的解。

三、（8 分）解方程组：

$$x'=y-z,\quad y'=x+y,\quad z'=x+z。$$

四、（7 分）求一曲线，使其切线在纵轴上之截距等于切点的横坐标。

五、（6 分） 设 $f(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 连续，试证：方程 $dy-f(x,y)dx=0$ 为线性方程的充分条件是它有仅依赖与 x 的积分因子。

六、（5 分）设 $n\times n$ 矩阵函数 $A_1(t)$, $A_2(t)$ 在（a, b）上连续，试证明：若方程组 $\dfrac{dX}{dt}=A_1(t)X$ 与 $\dfrac{dX}{dt}=A_2(t)X$ 在（a, b）上有相同的基本解组，则 $A_1(t)\equiv A_2(t)$，$x\in(a,b)$。

七、（5 分）试证：如果 $\varphi(t)$ 是 $\dfrac{dX}{dt}=AX$ 满足初始条件 $\varphi(t_0)=\eta$ 的解，则有

$$\varphi(t)=\exp A(t-t_0)\eta。$$

八、（6 分）设 $f(x)$ 为连续函数，且满足 $f(x)=e^x-\int_0^x(x-t)f(t)dt$，求 $f(x)$。

九、（5 分）设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$，求证：方程 $\dfrac{dy}{dx}+py=f(x)$ 的任意解 $y=y(x)$ 均有 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$，其中 $p>0$。