2012年硕士研究生入学初试试题

科目代码：816　科目名称：高等代数

注：(1) 本试题共2页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

一、单项选择题（每小题4分，满分20分）

(1)已知α是n维列向量，且$\alpha^T\alpha=1$，若$A=E-\alpha\alpha^T$，行列式$|A|$的值为

（A）0；　（B）-1；　（C）1；　（D）2.

(2)设A为n阶非零矩阵，E为n阶单位矩阵，若$A^3=O$，则

（A）$E-A$不可逆，$E+A$不可逆；　（B）$E-A$不可逆，$E+A$可逆；

（C）$E-A$可逆，$E+A$可逆；　（D）$E-A$可逆，$E+A$不可逆.

(3)设矩阵$B=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}$，已知矩阵$A$相似于$B$，则秩$(A-2E)$与秩$(A-E)$之和等于

（A）2；　（B）3；　（C）4；　（D）5.

(4)设矩阵$A=\begin{pmatrix}1&0&-1\\2&\lambda&-1\\1&2&1\end{pmatrix}$，$B$为3阶矩阵，且$r(B)=2,r(AB)=1$，则的$\lambda$等于

(A) -1；　（B）1；　（C）-3　（D）3.

(5)设λ_1,λ_2是矩阵A两个不同的特征值，对应的特征向量分别为α_1,α_2，则$\alpha_1,A(\alpha_1+\alpha_2)$线性无关的充要条件是

(A)$\lambda_1\neq0$；　（B）$\lambda_2\neq0$；　（C）$\lambda_1=0$　（D）$\lambda_2=0$.

二、填空题（每小题6分，本题满分30分）

(1) 设多项式 $f(x)=x^{m+n}-x^m-x^n-1,g(x)=x^m-x^{m-n}-2,m>n$，则$(f(x),g(x))=$______.

(2)设n阶矩阵A中某元素a_{ki}的代数余子式$A_{ki}\neq0$，且$|A|=0$，则齐次线性方程组$AX=0$的通解为________.

(3)设二次型$f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+\alpha x_2^2+x_3^2-4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$通过正交变换化为标准形$f=5y_1^2+\beta y_2^2-4y_3^2$，则参数$\alpha=$______，$\beta=$______.

(4)矩阵$A=\begin{pmatrix}-1&-2&6\\-1&0&3\\-1&-1&4\end{pmatrix}$的$Jordan$标准形为$J=$______.

(5)已知线性变换σ在基$\alpha_1=(1,1)^T,\alpha_2=(1,-1)^T$下的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$，则对于任意向量$X=(x_1,x_2)^T$，有$\sigma(X)=$______.

三、（10 分）计算 n 阶行列式 $D_n=\begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_2 & x+a_1 \end{vmatrix}$.

四、（14 分）设矩阵 A 的伴随矩阵 $A^*=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，且 $AXA^{-1}=XA^{-1}+3E$，求矩阵 X.

五、（16 分）问 a,b 为何值时，非齐次线性方程组 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=0 \\ x_2+2x_3+2x_4=1 \\ -x_2+(a-3)x_3-2x_4=b \\ 3x_1+2x_2+x_3+ax_4=-1 \end{cases}$ 有唯一解，求出唯一解；无解；有无穷多解，并写出通解.

六、（10 分）设 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，试证：对 $n\geq 3$，有 $A^n=A^{n-2}+A^2-E$，并求 A^{100}.

七、（10 分）设 $f(x)$ 为次数大于零的多项式，证明：如果 $f(x)\mid f(x^n)$，则 $f(x)$ 的根只能是零或单位根.

八、（10 分）设 A 为 n 阶实对称矩阵，证明：A 可逆的充要条件是存在 n 阶矩阵 B，使 $AB+B^TA$ 正定.

九、（10 分）若单位列向量 α，$\beta\in R^n$，且 $\alpha^T\beta=0$，则矩阵 $\alpha\beta^T+\beta\alpha^T$ 相似于对角阵 $\Lambda=diag\{1,-1,0,\cdots,0\}$.

十、（10 分）设 T 是线性空间 V 上的线性变换，X 是 V 的一个非零向量，若向量组 $X,T(X),\cdots,T^{m-1}(X)$ 线性无关，$T^m(X)$ 与它们线性相关，证明：子空间 $L(X,TX,\cdots,T^{m-1}X)$ 是 T 的不变子空间，并求 T 在基 $X,T(X),\cdots,T^{m-1}(X)$ 下的矩阵.

十一、（10 分）(1) 设 T 为欧氏空间 V 的一个线性变换，证明：T 为正交变换的充要条件是 T 保持两向量 α 与 β 的距离不变，即 $|T\alpha-T\beta|=|\alpha-\beta|$；(2) 问：欧氏空间保持距离不变的变换是否一定是线性变换？