

2012 年硕士研究生入学初试试题

科目代码: 702 科目名称: 数学分析

注: (1) 本试题共 1 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答, 答在题签或草稿纸上一律无效。

一、求解下列问题 (共 14 分, 其中每小题 7 分)

1.
$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + e^{2x}) - 2x}{\ln(\sin^2 x + e^x) - x}$$

2.
$$\int \frac{x+1}{x(1+xe^x)} dx$$

二、设 $0 < x_1 < 1$, $x_{n+1} = x_n(1-x_n)$, $n=1, 2, \dots$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} nx_n = 1$. (14 分)三、函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处有定义, $f(0)=1$, 且 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x \cdot f(x)}{e^{x^2} - 1} = 0$,证明: 函数 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处可导, 并求 $f'(0)$. (12 分)四、设方程
$$\begin{cases} e^x = 3t^2 + 2t + 1 \\ t \sin y - y + \frac{\pi}{2} = 0 \end{cases}$$
 确定 y 为 x 的函数, 其中 t 为参变量, 求 $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=0}$. (12 分)五、设函数 $f(x)$ 连续, 且 $\int_0^1 tf(2x-t)dt = \ln(1+x^4)$, $f(1)=1$, 求 $\int_0^2 f(x)dx$. (14 分)六、设函数 $f(x, y)$ 具有连续偏导数, 且 $f(1, 1)=1$, $f_x(1, 1)=2$, $f_y(1, 1)=3$,如果 $\varphi(x) = f(x, f(x, x))$, 求 $\varphi'(1)$. (12 分)七、将函数 $f(x) = \arctan \frac{1-x}{1+x}$ 展开成 x 的幂级数, 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1}$ 的和. (15 分)八 设 $S_n(x) = (1 + \frac{x}{n})^n$, 则 $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, +\infty)$ 上收敛于 $S(x) = e^x$. 对于任意的正数 a , 证明: $\{S_n(x)\}$ 在 $[0, a]$ 上一致收敛. (15 分)九、计算 $\oiint_S \frac{x-1}{r^3} dydz + \frac{y-2}{r^3} dzdx + \frac{z-3}{r^3} dxdy$, 其中 $r = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2}$, S 为长方体 $V = \{(x, y, z) \mid |x| \leq 2, |y| \leq 3, |z| \leq 4\}$ 的表面并取外侧. (15 分)十、曲面 $z = x^2 + y^2$ 被 $x + y + z = 1$ 截成一椭圆, 求原点到该椭圆的最长距离. (15 分)十一、函数 $f(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上有连续的一阶导数, 证明:

$$\left| \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \max \left(\int_0^1 |f'(x)| dx, \left| \int_0^1 f(x) dx \right| \right) \quad (12 分)$$