2012年硕士研究生入学复试试题

科目代码：B23　科目名称：常微分方程

注：(1) 本试题共 1 页。

(2) 请按题目顺序在标准答题纸上作答，答在题签或草稿纸上一律无效。

注：请将试题做在标准答题纸上，在题签上做题无效。每题十分。

一、求方程 $x\dfrac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y \quad (x<0)$ 的解。

二、用积分因子法求方程 $\dfrac{dy}{dx}+P(x)y=f(x)$ 的解。

三、求方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{x^4+x^3}{xy^2}$ 的解。

四、验证方程是恰当方程，并求出方程的解。

$$2x(ye^{x^2}-1)dx+e^{x^2}dy=0$$

五、求方程 $y'^3-x^3(1-y')=0$ 的解。

六、方程 $\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2$ 定义在矩形域 $R:-1\le x\le 1,-1\le y\le 1$ 上，试利用存在唯一性定理确定经过点（0,0）的解的存在区间，并求在此区间上与真正解的误差不超过 0.05 的近似解的表达式。

七、设$A(t),f(t)$分别为在区间 $a\le t\le b$ 上连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，证明方程组

$x'=A(t)x+f(t)$ 存在且最多存在 $n+1$ 个线性无关解。

八、考虑方程组 $x'=Ax+f(t)$，其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix},x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix},f(t)=\begin{bmatrix}\sin t\\ \cos t\end{bmatrix}$，

a) 验证 $\Phi(t)=\begin{bmatrix}e^{2t} & te^{2t}\\ 0 & e^{2t}\end{bmatrix}$ 是 $x'=Ax$ 的基解矩阵；

b）求 $x'=Ax+f(t)$ 的满足初始条件 $\varphi(0)=\begin{bmatrix}1\\ -1\end{bmatrix}$ 的解 $\varphi(t)$。

九、解下列方程

1) $xx''+(x')^2=0$

2) 用拉普拉斯变换法求方程 $x'''+3x''+3x'+x=1$ 满足初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解。

十、求方程 $x^{(4)}-2x''+x=t^2-3$ 的解。