

军械工程学院 2010 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目 数学分析

共 2 页第 1 页

(答题一律写在答题纸上, 写在试卷上无效)

一. 本题共 2 小题, 满分 30 分.

1. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n (1-x)x^n$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.2. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}$.

二. 本题共 3 小题, 满分 30 分.

1. 设 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 连续, $\lim_{x \rightarrow 0+0} f(x) = A$, 则对任 $0 < a < b$ 有

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\frac{a}{n}}^{\frac{b}{n}} \frac{f(x)}{x} dx = A \ln \frac{b}{a}$$

2. 判断级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n!}}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2}) \cdots (2+\sqrt{n})}$ 的敛散性3. 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2x}{x^2+n^3}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 一致收敛

三. 本题共 3 小题, 满分 30 分.

1. 设 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 连续且满足 $f(-\pi) = f(\pi)$, $f(x)$ 有分段连续的导函数, 则 $f(x)$ 的 Fourier 系数满足: $a_n = o(\frac{1}{n})$, $b_n = o(\frac{1}{n})$ 2. 对任意正数列 $\{x_n\}$ 成立:

$$\text{上极限} \quad \limsup_{n \rightarrow \infty} n \left(\frac{1+x_{n+1}}{x_n} \right) \geq 1.$$

(答题一律写在答题纸上, 写在试卷上无效)

3. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 连续, 求 $I = \int_L \frac{1+y^2 f(xy)}{y} dx + \frac{x}{y^2} (y^2 f(xy) - 1) dy$, 其

中 L 是从点 $A(3, \frac{2}{3})$ 到点 $B(1, 2)$ 的任何分段光滑曲线(不含 $y = 0$ 的点)

四. (20 分) 证明: $\int_0^1 \frac{1}{x} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) dx = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2}$.

五. (20 分) 设 $f(x, y)$ 在 $I_1 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ 上定义,

在 $I_0 = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, y = 0\}$ 上连续, 证明: $\exists \delta > 0$, 使得 $f(x, y)$ 在

$I_\delta = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq \delta\}$ 有界。

六. (20 分) 设 $f(x) = a_1 \sin x + a_2 \sin(2x) + \cdots + a_n \sin(nx)$, 且 $|f(x)| \leq |\sin x|$,

$a_i (i = 1, 2, \cdots, n)$ 为实常数, 求证: $|a_1 + 2a_2 + \cdots + na_n| \leq 1$.