军械工程学院 2011 年硕士研究生入学考试试卷

考试科目 数学分析 共 2 页第 1 页

（答题一律写在答题纸上，写在试卷上无效）

说明：共 15 题，每题 10 分，答题时要写明主要步骤。

一、 设 $x_n > 0, \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n} = a$.

二、 证明：闭区间[a,b]到[a,b]上的连续函 $f(x)$ 必存在不动点（即：存在 $x\in[a,b], f(x)=x$）。

三、 设 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 是任意的二阶连续可导函数，证明：$z = x\varphi(\dfrac{y}{x}) + \phi(\dfrac{y}{x})$

满足：$x^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\dfrac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} + y^2\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$

四、 用“$\varepsilon-\delta$”或“$\varepsilon-N$”语言叙述下列概念：

a) 数列 $\{a_n\}$ 无界，但不是无穷大量；

b) 数列 $\{a_n\}$ 存在子列收敛于点 a.

五、 证明：

$$f(x) = \begin{cases} \sin\pi x, x\text{为有理数；} \\ \ \ 0 \quad\ , x\text{为有理数.} \end{cases}$$

在 $x = n(n$ 是整数）连续。

六、 设 $f(x)$ 在（a,b）内连续，则 $f(x)$ 在(a,b)内一致连续的充分必要条件是 $f(a+0), f(b-0)$ 存在。

七、 设 $f(x)$ 在 x_0 可导，$g(x)$ 在 x_0 不可导，则 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 x_0 点是否可导？试分别举例说明。又 $f(x_0)\neq 0$ 呢？

八、 用 Heine 定理及数列极限和的运算性质证明函数极限和的运算性质：

（答题一律写在答题纸上，写在试卷上无效）

若极限

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a, \lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b,$则$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))$存在且$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=a+b$.

九、 设 $f(x,y)$ 是在区域 $D:|x|\le 1,|y|\le 1$ 上的有界 k 次齐次函数，即满足 $\forall t>0,$有 $f(tx,ty)=t^k f(x,y)(k\ge 1)$，证明：$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$ 存在，且求其值。

十、 用闭区间套定理证明连续函数有界性定理：闭区间上的连续函数必有界。

十一、 求幂级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(\frac{\ln n}{n^3}+\frac{1}{n\ln n})x^n$ 的收敛域。

十二、 计算第二类曲面积分 $\iint_S x^3dydz+y^3dzdx+z^3dxdy$，其中 $S=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2=1\}$.

十三、 设 $y_0\in R, y_n=\arctan ky_{n-1}(0<k<1),$ 证明：

a) $|y_{n+1}-y_n|\le k|y_n-y_{n-1}|$;

b) $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 收敛。

十四、 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 中每一个函数 $f_n(x)$ 都在 (a,b) 内一致连续，且 $f_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$.证明：$f(x)$在(a,b) 内一致连续.

十五、 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界，证明：

a) 存在 $\{x_n\}\subset[a,b]$ 使极限 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=\infty$；

b) $\exists c\in[a,b],$ 使得 $\forall\delta>0, f(x)$在$[c-\delta,c+\delta]\bigcap[a,b]$上无界。