军械工程学院 2012 年硕士研究生入学考试试题

考试科目： 数学分析　　　　　　　　　　代码：814

（请在答题纸上答题，在此试题纸上答题无效）

一、计算下列各题（共 28 分，每小题 7 分）：

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}[x - x^2\ln(1+\frac{1}{x})]$；

(2) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$；

(3) $\int \ln^2(x+\sqrt{1+x^2})dx$；

(4) 设 $f(x)=\varphi(a+bx)-\varphi(a-bx)$，其中 $\varphi(x)$ 在 $x=a$ 处可导，求 $f'(0)$。

二、（8 分）设 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续，且对任何 $x,y\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x+y)=f(x)+f(y)$。证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续。

三、（10 分）过曲线 $y=x^2-1\quad(x>0)$ 上的点 P 做曲线的切线，此切线交坐标轴于点 M,N，试求点 P 的坐标，使 ΔOMN 的面积最小。

四、（8 分）证明函数 $(1+\frac{1}{x})^x$ 在区间 $(0,+\infty)$ 上单调增加。

五、（10 分）设 $f''(x)<0, f(0)=0,$ 证明对任何 $x_1>0, x_2>0,$ 有

$$f(x_1+x_2)<f(x_1)+f(x_2)。$$

六、（10 分）设 $f(x),g(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 内可导，对一切 $x\in(a,b)$，有 $g'(x)\neq 0$，则必存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(\xi)-f(a)}{g(b)-g(\xi)}。$$

七、（10 分）讨论由 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x},\ (-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{\frac{\pi}{4}}<x<0)$ 确定的隐函数 $y=f(x)$ 的极值。

八、（10 分）设$z=\dfrac{y}{f(x^2-y^2)}$，其中 f 为可微函数，验证$\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial z}{\partial x}+\dfrac{1}{y}\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{z}{y^2}$。

九、（12 分）设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y^2}{(x^2+y^2)^{3/2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0.\end{cases}$$

证明：$f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处连续且偏导数存在；（2）问 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处是否可微？

十、（10 分）计算$\int_L \dfrac{y^2}{\sqrt{R^2+x^2}}dx+(4x+2y\ln(x+\sqrt{R^2+x^2}))dy$，其中 L 是圆周 $x^2+y^2=R^2$ 上由点 $A(R,0)$ 沿逆时针方向到 $B(-R,0)$ 的半圆周。

十一、（12 分）计算 $I=\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+(z^2-2z)dxdy$，其中 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被平面 $z=0$，$z=1$ 所截部分的外侧。

十二、（12 分）计算 $\iint\limits_{\Sigma} xyzdS$，其中 Σ 是由平面 $x=0,y=0,z=0$ 及 $x+y+z=1$ 所围成的四面体的整个边界曲面。

十三、（10 分）将 $y=\sin x, x\in(0,\pi)$ 展开成余弦级数，并求级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}$ 的和。