河北工业大学 2007 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B]

科目名称 高等代数　　科目代码 701　　共 2 页

适用专业 应用数学、计算数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、(本题满分 10 分) 已知 $M=\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$, A,D 可逆，

(1) 求 $|M|$.

(2) 若 A,M,D 可逆，则 $D-CA^{-1}B$ 可逆，求 $(D-CA^{-1}B)^{-1}$.

二、（本题满分 15 分）若

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -1 & -1 \end{pmatrix}, \text{求 } A^{100}$$

三、（本题满分 10 分）设有 s 个向量 $\alpha_i=(a_{i1},\cdots,a_{in}),(1\le i\le s, s\le n)$ 其分量满足

$$|a_{jj}|>\sum_{i=1,i\neq j}^{n}|a_{ij}|,(1\le j\le s),$$ 证明这 s 向量线性无关.

四、（本题满分 15 分）设 A 为二次幂零方阵，则存在可逆矩阵 P 使 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 0 & E_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,其中 E_r 为 r 阶单位矩阵.

五、（本题满分 15 分）对线性空间 V，有线性变换 δ 的不同特征根 $\lambda_1,\cdots\lambda_k$ 的特征向量 $\alpha_1,\cdots\alpha_k$, 若有 $\alpha_1+\cdots+\alpha_k\in W$，而 W 是 δ 的不变子空间.证明：$\dim(W)\ge k$.

六、（本题满分 20 分）试将 $Q(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+bx_2^2+ax_3^2+2cx_1x_3$ 划为标准形，求出变换矩阵，并指出 a,b,c 满足什么条件时，Q 正定.

七、（本题满分 20 分）设 A,B 都是 n 阶正定实对称矩阵.

证明：（1） AB 正定的充要条件是 $AB=BA$.

（2）如果 $A-B$ 正定，则 $B^{-1}-A^{-1}$ 也正定.

八、（本题满分 20 分）已知三维线性空间 V 有两组基：

(Ⅰ) $\{e_1,e_2,e_3\}$, (Ⅱ) $\{-e_3,-2e_2,-3e_1\}$,

(1) 写出(Ⅰ)到(Ⅱ)的过渡矩阵.

(2) 若向量α在基(Ⅰ)下的坐标为$\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$, 写出$\alpha$在基(Ⅱ)下的坐标.

(3) 定义线性变换 s 为

$$s(e_1)=e_1, s(e_2)=2e_2, s(e_3)=3e_3-e_1.$$

分别写出s关于基(Ⅰ)、(Ⅱ)的矩阵.

(4) 求$s(\alpha)$.

九、(本题满分 15 分) 设A为n阶方阵,且满足$A^2-3A+2E=0$.求一可逆矩阵T,使$T^{-1}AT$为对角形.

十、(本题满分 10 分) 设$a_1,a_2,\cdots a_m$和$b_1,b_2,\cdots b_m$是n维欧氏空间中两个向量组. 证明存在一正交变换d, 使

$$d(a_i)=b_i, i=1,2,\cdots m$$

的充分必要条件为

$$(a_i,a_j)=(b_i,b_j), i,j=1,2,\cdots,m.$$