河北工业大学 2010 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [A]卷

科目名称 高等代数　　科目代码 360　　共 2 页

适用专业、领域 计算数学、应用数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、填空题（共 40 分，每题 4 分。答案一律写在答题纸上，否则无效）

1. 设 $f(x),g(x)$ 是有理系数多项式，且在复数域上有 $f(x)\mid g(x)$，则在有理数域上______（填“一定”或“未必”）有 $f(x)$ 整除 $g(x)$。

2. 若 n 级方阵 $A=E-\xi\xi^T$，其中 $\xi\neq 0,\xi\in R^n$，且 $\xi^T\xi=1$，则 $|A|=$________。

3. 如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关，那么向量组 $a_1\alpha_1+b_2\alpha_2$，$a_2\alpha_2+b_3\alpha_3$，$a_3\alpha_3+b_4\alpha_4$，$a_4\alpha_4+b_1\alpha_1$ 线性无关的充分必要条件是________________。

4. 设 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，$|A|=1$，将 A 的每个元素 a_{ij} 乘以 2^{i-j}，则所得新矩阵的行列式等于________。

5. 二次型 $f(x)=5x_1^2+x_2^2+5x_3^2+4x_1x_2-8x_1x_3-4x_2x_3$ 是否正定_______（填“是”或“不是”）。

6. n 级行列式（$n\geq 1$）$D=\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \vdots & & & \vdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}=$______________。

7. 设 A 为 n 级可逆矩阵，将 A 的第 i 行与第 j 行对换，得到矩阵 B，则 $AB^{-1}=$_________。

8. 设 V_1 和 V_2 是线性空间 V 的子空间，则包含 V_1 和 V_2 的最小子空间是_______，包含在 V_1 和 V_2 中的最大子空间是_______。

9. 设 A 为 n 级矩阵，$|A|\neq 0$，A^* 为 A 的伴随矩阵，E 为单位矩阵。若 A 有特征值 λ，则 $(A^*)^3+E$ 必有特征值__________。

10. 设 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 和 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 是线性空间 V 的两组基，且 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 到 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵是 P，σ 是 V 上的线性变换，且 $\sigma(e_i)=f_i$，$i=1,2,\cdots,n$。则 σ 在 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 下的矩阵为________。

二、（15 分）设 $f(x)$ 为实系数四次多项式，$x-2$ 是 $f(x)+5$ 的三重因式，$x+3$ 是 $f(x)-2$ 的二重因式，求 $f(x)$。

三、（15 分） 设齐次线性方程组为 $\begin{cases} (1+a)x_1+x_2+\cdots+x_n=0 \\ 2x_1+(2+a)x_2+\cdots+2x_n=0 \\ \quad\vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ nx_1+nx_2+\cdots+(n+a)x_n=0 \end{cases}$（$n\geq 2$）。试问 a 为何值时，该方程组有非零解，并求出其通解。

四、（共 15 分）设 A 为 n 阶实对称方阵，$S=\{x\mid x^T Ax=0, x\in R^n\}$

（1）（10 分）试给出 S 为 R^n 的子空间的充分必要条件，并加以证明。

（2）（5 分）当 S 为 R^n 的子空间时，求 $\dim(S)$。

五、（20 分） 设 σ 是数域 R 上线性空间 V 上的一个线性变换，用两种不同的方法证明：$\sigma^2-2\sigma=3I$（其中 I 为恒等变换）当且仅当 $r(\sigma-3I)+r(\sigma+I)=n$。

六、（15 分）设方阵 A,B 可交换且均相似于对角形，证明它们可同时对角化。

七、（15 分）实系数二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=X^T AX$，$A$ 的特征值为 1（二重）和 -1（二重），且 $\varepsilon_1=(1,-1,0,0)^T$，$\varepsilon_2=(1,-1,1,0)^T$ 是属于特征值 -1 的特征向量。求二次型 $f(x_1,x_2,x_3,x_4)=?$

八、（15 分）设 A 为正交矩阵，且 $|A|=1$。证明存在一个正交矩阵 B，使得 $A=B^2$。