

河北工业大学 2011 年攻读硕士学位研究生入学考试试题 [B] 卷

科目名称 数学分析

科目代码 810 共 2 页

适用专业、领域 计算数学\应用数学

注：所有试题答案一律写在答题纸上，答案写在试卷、草稿纸上一律无效。

一、(15分) 证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sin n$ 不存在.二、(15分) 设 $u = f(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2)$, 求证:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

$$= 3 f''_{11} + 4(x + y + z) f''_{12} + 4(x^2 + y^2 + z^2) f''_{22} + 6 f'_2.$$

三、(15分) 设 $f(x)$ 是 $(0, +\infty)$ 上正可微函数, 求

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \left(\frac{f(x + yx)}{f(x)} \right)^{\frac{1}{y}}.$$

四、(15分) 设 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 在 (a, b) 内可导, 证明存在

$$\xi \in (a, b) \text{ 使得 } \frac{bf(b) - af(a)}{b - a} = f(\xi) + \xi f'(\xi).$$

五、(15分) 计算积分

$$I = \int_{c^+} (-2xe^{-x^2} \sin y) dx + (e^{-x^2} \cos y + x^4) dy,$$

其中 c^+ 为从点 $(1, 0)$ 到 $(-1, 0)$ 的半圆 $y = \sqrt{1 - x^2}$ ($-1 \leq x \leq 1$).六、(15分) 证明 $\int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $\alpha \geq 0$ 范围内关于 α 一致收敛.七、(15分) 证明积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 而非绝对收敛.八、(15分) 设函数 $f(x)$ 有连续导数, 且 $f(0) = 0$, 求

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{\pi t^4} \iiint_{x^2 + y^2 + z^2 \leq t^2} f(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) dx dy dz.$$

九、 (15分) 证明: 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)dx \int_a^b g^2(x)dx.$$

十、 (15分) 叙述区间套定理及有限覆盖定理.