

2005 年天津工业大学硕士研究生入学考试试题
试题编号：311（数学分析）

**考生注意：本试卷共四大题，满分 150 分，考试时间为 3 小时；
所有答案均写在答题纸上，在此答题无效。**

一. (本题共 15 小题，每小题 8 分，满分 120 分)

1) 求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2^2} \cdots \cos \frac{x}{2^n}$.

2) 设 $x_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = a$, 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x_n} = a$.

3) 证明: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 - 5x + 4} = -2$ (用 $\varepsilon - \delta$ 语言证明).

4) 证明: 闭区间 $[a, b]$ 到 $[a, b]$ 上的连续函数 $f(x)$ 必存在不动点 (即: 存在 $x \in [a, b], f(x) = x$).

5) 设 $\varphi(x)$ 和 $\phi(x)$ 是任意的二阶连续可导函数, 证明: $z = x\varphi\left(\frac{y}{x}\right) + \phi\left(\frac{y}{x}\right)$ 满足:

$$x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

6) 用 “ $\varepsilon - \delta$ ” 或 “ $\varepsilon - N$ ” 语言叙述下列概念:

a) 数列 $\{a_n\}$ 无界, 但不是无穷大量;

b) 数列 $\{a_n\}$ 存在子列收敛于点 a .

7) 证明:

$$f(x) = \begin{cases} \sin \pi x, & x \text{ 为有理数;} \\ 0, & x \text{ 为无理数.} \end{cases}$$

在 $x = n$ (n 是整数) 连续。

8) 设 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 则 $f(x)$ 在 (a, b) 内一致连续的充分必要条件是

2005 年天津工业大学硕士研究生入学考试试题
试题编号：311（数学分析）

$f(a+0), f(b-0)$ 存在。

9) 设 $f(x)$ 在 x_0 可导, $g(x)$ 在 x_0 不可导, 则 $F(x) = f(x)g(x)$ 在 x_0 点是否可导?

试分别举例说明。又 $f(x_0) \neq 0$ 呢?

10) 证明: 若 $f(x), g(x)$ 在 $[a, b]$ 上定义且可积, 则

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)dx \right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(x)dx \right) \left(\int_a^b g^2(x)dx \right)$$

又, 等式何时成立?

11) 用 Heine 定理及数列极限和的运算性质证明函数极限和的运算性质: 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a, \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b, \text{ 则 } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) \text{ 存在且 } \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = a + b.$$

12) 设 $f(x, y)$ 是在区域 $D: |x| \leq 1, |y| \leq 1$ 上的有界 k 次齐次函数, 即满足 $\forall t > 0$, 有 $f(tx, ty) = t^k f(x, y) (k \geq 1)$, 证明: $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 存在, 且求其值。

13) 用闭区间套定理证明连续函数有界性定理: 闭区间上的连续函数必有界。

14) 求幂级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\ln n}{n^3} + \frac{1}{n \ln n} \right) x^n$ 的收敛域。

15) 计算第二类曲面积分 $\iint_S x^3 dydz + y^3 dzdx + z^3 dxdy$, 其中 $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$.

(二) (10分) 设 $y_0 \in R, y_n = \arctan ky_{n-1} (0 < k < 1)$, 证明:

a) $|y_{n+1} - y_n| \leq k|y_n - y_{n-1}|;$

2005 年天津工业大学硕士研究生入学考试试题
试题编号：311（数学分析）

b) $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ 收敛。

(三) (10 分) 若函数列 $\{f_n(x)\}$ 中每一个函数 $f_n(x)$ 都在 (a,b) 内一致连续, 且 $f_n(x)$ 在 (a,b) 内一致收敛于 $f(x)$. 证明: $f(x)$ 在 (a,b) 内一致连续.

(四) (10 分) 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上无界, 证明:

a) 存在 $\{x_n\} \subset [a,b]$ 使极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = \infty$;

b) $\exists c \in [a,b]$, 使得 $\forall \delta > 0, f(x)$ 在 $[c - \delta, c + \delta] \cap [a,b]$ 上无界。