2006年天津工业大学硕士研究生入学考试试题
试题编号：426（高等代数）

考生注意：本试卷共十一大题，满分150分。考试时间为3小时；所有答案均写在答题纸上,在此答题一律无效。

一. 填空题（本题共10小题，每小题3分，满分30分）

（1）设A是3阶方阵，$|A|=2$，则$\left|(2A)^* - (\frac{1}{6}A)^{-1}\right| =$____ .

(2) 向量组$\alpha_1=(-1,1,2,4),\alpha_2=(3,0,1,2),\alpha_3=(0,3,7,14)$, $\alpha_4=(-2,1,2,0)$，$\alpha_5=(1,2,5,10)$ 的一个极大线性无关组是__________ .

(3) 在R^3中,向量$\alpha=(1,-1,0)$在基$\alpha_1=(0,0,1),\alpha_2=(0,1,-1)$, $\alpha_3=(1,-1,0)$下的坐标为__________ .

(4) 已知 $-1,0,1$ 是 3 阶矩阵 A 的 3 个特征值,则 $|4I-2A|=$_____ .

(5) 若$I+A$可逆,$I-A$不可逆,则A有特征值_____ .

(6) 数域P上n级对称矩阵组成的P上的向量空间的维数是__________ .

(7) 欧氏空间中m个向量两两正交,它们是否线性无关(答是或否)___ .

(8) $A=\begin{pmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&8\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}6&2&0\\2&6&0\\0&0&4\end{pmatrix},C=\begin{pmatrix}4&1&0\\0&4&1\\0&0&8\end{pmatrix}$

则____与____合同,____与____相似.

(9) 设A是3阶满秩矩阵,$B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&3\\-1&0&3\end{pmatrix}$,则$r(AB)=$______ .

(10) 若二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+3x_3^2+2x_1x_2+2tx_2x_3$ 正定,则 t 的取值范围是________ .

二. (本题满分 10 分)

设 $D=\left|(a_{ij})_n\right|$,其中(1) $a_{ij}=\max(i,j)$,(2) $a_{ij}=\min(i,j)$.求 D 的值.

三. (本题满分 10 分)

设 $f(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\cdots+a_m$,又 A 是 n 阶方阵,若 $a_m\neq 0$ 且 $f(A)=0$, 则 A 可逆,并求 A^{-1} .

四. (本题满分 15 分)

在 R^4 中(R 为实数域),求由齐次线性方程组

$$\begin{cases}3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0\\3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0\\3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0\end{cases}$$

确定的解空间的一组基与维数.

五. (本题满分 10 分)

设 A,B 为 n 阶正定矩阵,证明 $\left|\lambda B-A\right|=0$ 的根均为正实数.

六. (本题满分 10 分)

设 $m\times n$ 矩阵 A 的秩为 r ,则存在 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q ,使得 $A=PQ$.

七. (本题满分 15 分)

设 η_0 是 $Ax=b(b\neq 0)$的解, $r(A_{m\times n})=r$, 它的导出组 $Ax=0$ 的基础解系为 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_{n-r}$, 证明 $\eta_0,\eta_0+\eta_1,\cdots,\eta_0+\eta_{n-r}$ 线性无关.

八. (本题满分 15 分)

设 $A=\begin{pmatrix}7 & 4 & -1\\ 4 & 7 & -1\\ -4 & -4 & x\end{pmatrix}$ 的特征值 $\lambda_1=\lambda_2=3,\ \lambda_3=12$，求 x.并问 A 能否对角化?若能求 $P,\ D$,使得 $P^{-1}AP=D$.

九. (本题满分 15 分)

设 $f(x)$ 为数域 P 上的多项式,且有 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$，$(f_1(x),f_2(x))=1$,又设 V 是 P 上 n 维向量空间,σ 为 V 上的线性变换,K 为 $f(\sigma)$ 的核,W_1 为 $f_1(\sigma)$ 的核,W_2 为 $f_2(\sigma)$ 的核,证明:

$$K=W_1\oplus W_2\ .$$

十. (本题满分 10 分)

证明:若 σ 是正交变换,则 σ 的不变子空间的正交补也是 σ 的不变子空间.

十一.(本题满分 10 分)

求矩阵 $A=\begin{pmatrix}13 & 16 & 16\\ -5 & -7 & -6\\ -6 & -8 & -7\end{pmatrix}$ 的若当标准形.