2007年天津工业大学硕士研究生入学考试试题

试题编号：601　　试题名称：数学分析

注意事项： 1．本试卷共 **4** 道大题（共计 **18** 小题），满分 **150** 分；

2．本卷属试题卷，答案一律写在答题纸上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑色钢笔或圆珠笔答题，其它笔答题均无效。

* *

一.（本题共 15 小题，每小题 8 分，满分 120 分）

（1）什么数列$\{x_n\}$具有性质：$\forall N>0,\exists\varepsilon>0,\exists n>N,|x_n-a|<\varepsilon$？

（2）计算:$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)\arcsin x}{\tan x-\sin x}$.

（3）证明：$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{2x^2+3x-5}=\dfrac{3}{7}$（用$\varepsilon-\delta$语言证明）

（4）求数列$\{x_n=\sin\dfrac{n\pi}{13}\}$的上、下极限$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n,\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n$.

（5）用 Heine 定理及数列极限的保号性定理证明函数极限的保号性定理：若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a>0$，则$\exists\delta>0,\ 0<|x-x_0|<\delta$有$f(x)>0$.

（6） 求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^2x^{n-1}$的收敛域, 并求和.

（7） 将$f(x)=x$在$[0,\pi]$上展开成 Fourier 级数的正弦级数.

（8）画出$I(x)=\int_0^1 t|t-x|dt$ 的草图.

（9）证明：奇函数$f(x)$的原函数为偶函数.

（10）证明：若$f(x)$在x_0的某邻域$O(x_0)$内定义，则$f'(x_0)$存在的充分必要条件是$\exists g(x)$在$O(x_0)$定义，在x_0连续，且$f(x)=f(x_0)+(x-x_0)g(x)$.

（11）计算第一型曲面积分$\iint\limits_S(x+y+z)dS$,其中S是球面$x^2+y^2+z^2=a^2,z\ge 0$.

（12） 设$f(x)$在闭区间$[0,a]$上连续且严格单调增加，$f(0)=0,g(f(x))=x$ ．证明:

$$\int_0^a f(x)dx = \int_0^{f(a)} (a - g(x))dx \ .$$

(13) 证明:数列$\{x_n\}$有界的充分必要条件是$\{x_n\}$的任意子列有收敛子列.

(14) 设 I 为有限闭区间，若 $f: I \to I, \forall x, y \in I, |f(x) - f(y)| \le k|x - y|, 0 \le k < 1$，

证明：$\forall x_0 \in I, x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 0,1,2,\cdots$,有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ 存在，且 $f(x) = x$.(提示:用 Cauchy 收敛准则)

(15) 证明:由方程 $F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$ 满足 $x\dfrac{\partial z}{\partial x} + y\dfrac{\partial z}{\partial y} = z - xy$.

二、（10 分）设 $f(x, y)$ 是在 $D: |x| \le 1, |y| \le 1$ 上的有界 k 次齐次函数（即满足 $\forall t > 0, f(tx, ty) = t^k f(x, y)(k \ge 1)$. 证明：极限$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}[f(x, y) + (x - 1)e^y]$存在，并求出来.

三、（10 分）证明: 1) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{1}{n + x}$关于$x$在$(-\infty, \infty)$上一致收敛，但对任意$x$非绝对收敛;

2) 级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^2}{(1 + x^2)^n}$在任意 $x \in (-\infty, \infty)$绝对收敛，但在$(-\infty, \infty)$非一致收敛.

四、（10 分） 设 $f_n(x)$ 在闭区间$[a, b]$上连续， $f_n(x)$ 在闭区间$[a, b]$上一致收敛于 $f(x)$ ，证明： $f_n(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上等度连续（即 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x', x'' \in [a, b], |x' - x''| < \delta$时，有$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon$，对任意自然数$n$成立）.