2007 年天津工业大学硕士研究生入学考试试题

试题编号：417　　试题名称：高等代数

注意事项： 1．本试卷共**十一**道大题（共计**十三**小题），满分 **150** 分；

2．本卷属试题卷，答案一律写在答题纸上，写在该试题卷上或草稿纸上均无效。要注意试卷清洁，不要在试卷上涂划；

3．必须用蓝、黑色钢笔或圆珠笔答题，其它笔答题均无效。

* *

一、（10 分）计算 $n+1$ 阶行列式：$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ b_1 & a_1 & a_1 & \cdots & a_1 \\ b_1 & b_2 & a_2 & \cdots & a_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & a_n \end{vmatrix}$

二、（15 分）λ 取何值时，线性方程组

$$\begin{cases} -2x_1 + x_2 + x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = \lambda \\ x_1 + x_2 - 2x_3 = \lambda^2 \end{cases}$$

有解？并求其通解.

三、（15 分）设 $A^* = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 0 & 8 \end{pmatrix}$，　$ABA^{-1} = BA^{-1} + 3E$，求 B.

四、（10 分）设多项式 $f(x) \neq 0, g(x) \neq 0, p(x)$ 是首项系数为 1 的不可约多项式，若 $f(x)g(x) + f(x) + g(x) = p(x)$，则 $(f(x), g(x)) = 1$.

五、（10 分）设 A 是 $m \times n$ 的矩阵，B 是 $n \times s$ 的矩阵，证明：$r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$.（$r(A)$ 表示矩阵 A 的秩）

六、（10 分）设 A 为 n 阶正定矩阵，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 为实 n 维非零列向量，当 $i \neq j$ 时有 $\alpha_i' A \alpha_j = 0$，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

七、（15 分）设 R^4 的两个子空间为：

$V_1 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$

$V_2 = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) | x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0\}$

求$V_1 + V_2$与$V_1 \cap V_2$的基与维数.

八、（20 分）设V是n维欧氏空间，$\alpha \neq 0$是V中一固定向量，证明：

(1) $V_1 = \{x | (x, \alpha) = 0, x \in V\}$是$V$的一个子空间.

(2) V_1的维数等于$n-1$.

九、(15 分)用正交线性替换将二次型

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 - 4x_1x_2 - 4x_2x_3$$

化为标准型.

十、（20 分）设σ, τ是向量空间V的两个线性变换，且$\sigma\tau = \tau\sigma$

证明：(1) τ的值域τV与核$\tau^{-1}(0)$都是σ的不变子空间.

(2)若λ_0是σ的一个特征值，则σ的特征子空间V_{λ_0}是τ的不变子空间.

十一、（10 分）设$f(x) \in P[x]$，$f(x) = g(x)h(x)$，且$(g(x), h(x)) = 1$，V是数域P上的n维向量空间，　σ是V上的线性变换，证明：

$$(f(\sigma))^{-1}(0) = (g(\sigma))^{-1}(0) \oplus (h(\sigma))^{-1}(0)$$