1998 年天津大学高等代数考研试题

一（共10分）

1. 如果 $d(x)|f(x)$，$d(x)|g(x)$，且 $d(x)$ 为 $f(x)$，$g(x)$ 的一个组合，证明 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的一个最大公因式。

2. 设 $f(x)=x^3+(1+k)x^2+2x+2l$ 与 $g(x)=x^3+kx^2+l$ 的最大公因式是一个二次多项式，求 k，l 的值。

二（10分）

讨论 a，b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3 \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解？无解？在有解的情况下求出它的一般解（由结构式表示）

三（10分） 设非零n阶方阵 $A=(a_{ij})$，$(n\geq 3)$ 如果 $a_{ij}\in R$ $(i,j=1,2\cdots n)$ 且 $a_{ij}=A_{ij}$ $(i,j=1,2\cdots n)$，其中 A_{ij} 是 $|A|$ 中元素 a_{ij} 的代数余子式

试证 1. $r(A)=n$

2. A是正交矩阵

四（10分） 设三阶方阵 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$，求A的初等因子及若当标准形。

五（15分） 设实二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+3x_2^2+3x_3^2-4x_2x_3$，

求一正交变换化 $f(x_1,x_2,x_3)$ 为标准形，并判定该二次型的正定性。

六（共15分） 设V是实函数空间，又 V_1 与 V_2 是V的子空间，其中

$V_1=L(1,x,\sin x)$，$V_2=L(\cos 2x,\cos^2 x)$

1. 求 V_1 的一组基和维数。

2. 求 V_2 的一组基和维数

3. 求 V_1+V_2 的一组基和维数

4. 求 $V_1 \cap V_2$ 的一组基和维数

七（15分） 在线性空间 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 中规定： $\forall X \in \mathbb{R}^{2\times2}$

$$\mathcal{A}(X) = PX \qquad \text{其中二阶方阵 } P=\begin{pmatrix}1&1\\1&2\end{pmatrix}$$

1. 证明 $\mathcal{A}$ 是 $\mathbb{R}^{2\times2}$ 上的线性变换。
2. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $E_{11}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{12}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$E_{21}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$，$E_{22}=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}$ 下的矩阵 A。
3. 求 $\mathcal{A}$ 在基 $A_1=\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}$，$A_2=\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$，$A_3=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$A_4=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$ 下的矩阵 B.
4. 设 $Q=\begin{pmatrix}1&2\\2&3\end{pmatrix}$，求 $\mathcal{A}(Q)$ 在基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ 下的坐标

八（共15分）

1. 设 $\mathcal{A}$ 是 n 维欧氏空间 V 上的一个正交变换，证明 $\mathcal{A}$ 的不变子空间的正交补也是 $\mathcal{A}$ 的不变子空间。

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots x_n) = X^TAX$，且 $|A|<0$。
证明：存在非零列向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$，使得 $X^TAX<0$

3. 设 n 维列向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_m$（m 为奇数）为 n 元齐次线性方程组 $AX=0$ 的一个基础解系。
证明：$\alpha_1+\alpha_2, \alpha_2+\alpha_3, \cdots \alpha_{m-1}+\alpha_m, \alpha_m+\alpha_1$ 也是 $AX=0$ 的一个基础解系