1998年天津大学数学分析考研试题

一、计算下列各题（每小题8分，共40分）

1. 求 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}x-\sin x}{xe^{x^2}-x}$

2. 求 $I=\int_{-1}^{1}x(1+x^{1997})(e^{x}-e^{-x})dx$

3. 设方程 $z+xy=f(xz,yz)$ 确定可微函数 $z=z(x,y)$，求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$

4. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n+2^n}{n}x^n$ 的收敛域

5. 求 $I=\int_{1}^{2}dx\int_{\sqrt{x}}^{x}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy+\int_{2}^{4}dx\int_{\sqrt{x}}^{2}\sin\dfrac{\pi x}{2y}dy$

二、解下列各题（每小题10分，共20分）

1. 求 $I=\iint\limits_{D}\dfrac{1}{(x^2+y^2)^2}dxdy$，D是 $x^2+y^2=2x$ 内且 $x\geq 1$ 的部分。

2. 设 $\alpha'(x)$，$\beta'(x)$ 存在且 $\alpha(0)=-1$，$\beta(0)=0$，已知对任意简单光滑闭曲线 Γ，有

$$\oint_{\Gamma}[(x\alpha(x)+\beta(x))y^2+3x^2y]dx+[y\alpha(x)+\beta(x)]dy=0$$

求 $\alpha(x)$ 和 $\beta(x)$。

三、证明下列各题（每小题8分，共16分）

1. 设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上满足方程 $f(2x)=f(x)$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$

试证，在 $[0,+\infty)$ 上，$f(x)\equiv A$

2. 设 $f(x)=\int_0^1 \frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}dy$， $g(x)=\left(\int_0^x e^{-y^2}dy\right)^2$，$(x\geq 0)$

试证，当 $x\geq 0$ 时，$f(x)+g(x)=\frac{\pi}{4}$

四.（10分）

设 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} n e^{-nx}$， $x\in(0,+\infty)$

(1)、证明 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 内连续.

(2)、计算 $\int_{\ln 2}^{\ln 3} f(x)dx$

五.（8分）

证明 $\iiint\limits_V \frac{1}{r}dxdydz=2\iint\limits_{\Sigma}\cos(\vec{r},\hat{\vec{n}})dS$.

其中V是光滑闭曲面Σ所围立体，$\vec{n}$是Σ上点 (x,y,z) 处的外法矢量，(x_0,y_0,z_0) 是Σ外部的一点，$\vec{r}$ 是以点 (x_0,y_0,z_0) 到点 (x,y,z) 的矢量，$r=|\vec{r}|$.

六.（6分）

设 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积，$(n=1,2,\cdots)$ 且在 $[a,b]$ 上 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$，

证明 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积