1998 年天津大学最优化方法（线性规划与非线性规划）考研试题

一、填空题（共30分）

1. 设(LP)为标准型线性规划，其对偶规划为(DP)。$\bar{X}$是(LP)的可行解，$\bar{Y}$是(DP)的可行解，则它们的目标函数值满足关系式________。

2. 线性规划

$$\max z = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 + x_2 - 3x_3 - 3x_4 = 5 \\ 6x_1 + 7x_2 + 3x_3 - 5x_4 \geq 8 \\ 12x_1 - 9x_2 - 9x_3 + 9x_4 \leq 2 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

的对偶规划为________。

3. 设$f(x) \in C^1$，$X^{(k+1)} = X^{(k)} + \alpha_k P^{(k)}$，其中$P^{(k)} \neq 0$，$\alpha_k$为最佳步长，则$g^{(k+1)} = \nabla f(X^{(k+1)})$与$P^{(k)}$满足关系式________。

4. 求解无约束规划问题$\min f(X)$；$X^{(k)}$不满足最优性条件，在$X^{(k)}$处的搜索方向是$P^{(k)}$。

用最速下降法求解时，$P^{(k)}=$________。

当用Newton法求解时，$P^{(k)}=$________。

当用DFP变尺度法求解时，$P^{(k)}=$________。

当用F-R共轭梯度法求解时，$P^{(k)}=$________。

5. 若用Fibonacci法求$f(t) = t^2 - 6t + 2$在区间$[0, 10]$上的极小点，当缩短后的区间长度不大于原区间长度的3%时，至少需要计算______次函数值。

6. 已知规划问题

$$\min z = x_1^2 + x_2^2 - x_1 x_2 - 2x_1 - 3x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} -x_1 - x_2 \geq -2 \\ -x_1 - 5x_2 \geq -5 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

则它在点$\bar{X} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{5}{6} \end{pmatrix}$处的可行方向集为________，下降方向集为________

二、(6分) 用单纯形法求解下列线性规划:

$$\min z = -10x_1 - 5x_2 - 2x_3 + 6x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 \le 9 \\ -5x_1 + 6x_2 + 15x_3 \le 15 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 3 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \ge 0 \end{cases}$$

三、(24分) 用单纯形法解线性规划

$$\min z = -3x_1 + x_2 + x_3 + 10x_6 + 10x_7$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 + x_5 = 11 \\ -4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + x_6 = 3 \\ -2x_1 + x_3 + x_7 = 1 \\ x_1, \dots, x_7 \ge 0 \end{cases}$$

得最后单纯形表为

C_B	B	X_B	-3	1	1	0	0	10	10
			P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7
-3	P_1	4	1	0	0	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{5}{3}$
1	P_2	1	0	1	0	-1	0	1	-2
1	P_3	9	0	0	1	$-\frac{4}{3}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{7}{3}$
σ			0	0	0	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{29}{3}$	$\frac{28}{3}$

1. 写出最优解 X^*，最优基矩阵 B 及 B^{-1};
2. 写出其对偶规划的最优解;
3. 系数 $a_{24} = -1$ 在哪个范围内变化时，最优基最优解不变
4. $b_1 = 11$ 的改变量 $\Delta b_1 = -10$，试讨论最优基 B 是否改变。

四、(6分) 用对偶单纯形法求解线性规划。

$$\min z = 5x_1 + 2x_2 + 4x_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 \ge 4 \\ 6x_1 + 3x_2 + 5x_3 \ge 10 \\ x_1, x_2, x_3 \ge 0 \end{cases}$$

五.(6分) 用Newton法求二次函数

$$f(x)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$$

的极小值，取初始点 $x^{(0)}=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$。

六.(6分) 用外罚函数法求解规划问题，

$$\min z=(x-1)^2$$

$$s.t.\ -x+2\le 0.$$

七.(22分) 证明下列各题，

1. 已知(LP) $\min z=C^TX$

$$s.t.\begin{cases}AX=b & (b\ge 0)\\ X\ge 0\end{cases}$$

设 X^* 是(LP)的非退化的基最优解，分量 x_k 的判别数 $\sigma_k=0$，在与 X^* 对应的规范式中第K列元素 β_{ik} 皆为正数。试单纯形法说明，一定可以继续换基得到(LP)的另一基最优解。

2. 证明：$(0,0)^T$ 是规划问题

$$\min f(x)=5x_1^2-6x_1x_2+5x_2^2$$ 的严格局部极小点。

3. 若 $D\subset R^n$ 为非空凸集，$f(x)$ 为D上的可微函数，试证：$f(x)$ 是D上的凸函数的充分必要条件为，对 $\forall X,Y\in D$，恒有

$$[\nabla f(X)-\nabla f(Y)]^T(Y-X)\le 0.$$