1999年天津大学泛函分析(含度量空间)考研试题

考研加油站收集整理 http://www.kaoyan.com

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

一、判断题（每小题3分，共15分。在正确的小题后的括号内写"是"，在不正确的小题后的括内写"非"。）

1. 度量空间(X,d)是完备的充要条件是：X中任一Cauchy序列都有在X中收敛的子序列。（ ）

2. 若完备度量空间(X,d)上的映射$T:X\to X$满足条件

$$d(T^n x, T^n y)\le \frac{1}{\sqrt{2}}d(x,y) \quad (n\text{为自然数，对任意 } x,y\in X),$$

则T在X上有唯一的不动点。（ ）

3. 设X，Y都是赋范空间，则线性算子$T:X\to Y$是有界的，当且仅当T的零空间$\mathcal{N}(T)$是X的闭子空间。（ ）

4. 赋范空间$(l^\infty,\|\cdot\|)$是不可分的完备的自反空间（其中$\|x\|=\sup_i|\xi_i|$，对任意$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots)\in l^\infty$）。（ ）

5. 设$T:C^n\to C^n$是由n阶复方阵A确定的线性算子，$\sigma(T)$和$\sigma_p(T)$分别是T的谱和点谱，则$\sigma(T)\setminus\sigma_p(T)\ne\emptyset$。（ ）

kaoyan.com

二、单项选择题（每小题3分，共15分。将正确答案的代号填在题后的括号内。）

1. 设X，Y都赋范空间且Y是有限维的，$T:X\to Y$是线性算子，则

a) T是有界的。　　b) $T(\tilde{B}(0,1))$是Y中的有界集。

c) $\mathcal{R}(T)$是Y的完备子空间。　　d) $\mathcal{N}(T)$是X的闭子空间。

答：[ ]

2. 设X是任意的非空集合，(X,d_0)是离散度量空间，$x\in X$，则

a) $\overline{B(x,1)}=\tilde{B}(x,1)$.　　b) 单点集$\{x\}$是$X$中的开集。

c) (X,d_0)是紧空间。　　d) (X,d_0)是可分空间。

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com

kaoyan.com
考研加油站

3. 设 X, Y 都是赋范空间，$\{T_n\} \subset \mathcal{B}(X, Y)$，$T \in \mathcal{B}(X, Y)$，则 (a) $\lim T_n = T$ (即 $\{T_n\}$ 强收敛于 T) 是指

a) $\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n - T\| = 0$.

b) 对每个 $x \in X$，$\lim\limits_{n\to\infty} \|T_n x - Tx\| = 0$.

c) $\lim\limits_{n\to\infty} |\|T_n\| - \|T\|| = 0$.

d) 对每个 $x \in X$ 及每个 $g \in Y^*$，$\lim\limits_{n\to\infty} |g(T_n x) - g(Tx)| = 0$.

答：[ ]

4. 设 X 是内积空间，$A \subset X$，则

a) $A^\perp$ 是 X 的完备子空间。

b) $A \cap A^\perp = \{\theta\}$.

c) $X = A \oplus A^\perp$.

d) $A^\perp$ 是 X 的闭子空间。

答：[ ]

5. 设 H 是复 Hilbert 空间且 $H \neq \{\theta\}$. $T \in \mathcal{B}(H, H)$，则 T 是酉算子的充要条件是：

a) $\|T\| = 1$.

b) 对任意 $x \in H$，$\|Tx\| = \|x\|$.

c) T 是双射。

d) T 是满射且保持范数。

答：[ ]

证明下列各题（三～九）：

三.（10分）设 $(X, \|\cdot\|)$ 是任一赋范空间，Y 是 X 的完备子空间。试证 Y 是 X 中的闭集。

kaoyan.com

四.（10分）设 (X, d) 是紧度量空间，$T: X \to X$，若对任意的 $x, y \in X$，当 $x \neq y$ 时，恒有 $d(Tx, Ty) < d(x, y)$，则 T 在 X 上有唯一的不动点。

五.（10分）在实值连续函数空间 $C[a, b]$ 上定义泛函 f，使得对每个 $x \in C[a, b]$，

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x(t_i),$$

其中 $t_1, \cdots, t_n$ 是 $[a, b]$ 中 n 个不同的固定点，$\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ 是一组固定的实数。证明 f 是有界的，并求出 f 的范数。

六.（10分）设 X, Y 都是赋范空间，$T: X \to Y$ 是线性算子，试证：若 T 是有界的，则 T 是闭算子。

七.（10分）设 H_1, H_2 都是复 Hilbert 空间，$T \in \mathcal{B}(H_1, H_2)$，$T^*$ 是 T 的 Hilbert 伴随算子，则对任意 $\alpha \in \mathbb{C}$，有 $(\alpha T)^* = \bar{\alpha} T^*$.

kaoyan.com
考研加油站

八.(10分)设 X, Y 都是赋范空间，$\mathscr{B}_c(X,Y)$ 是 X 到 Y 的紧算子空间，试证：

若 Y 是 Banach 空间，则 $\mathscr{B}(X,Y)$ 也是 Banach 空间。

九.(10分)设 X, Y 都是赋范空间且 $X \neq \{0\}$，试证：$\mathscr{B}(X,Y)$ 是完备的，当且仅当 Y 是完备的。

kaoyan.com
kaoyan.com 考研加油站
www.kaoyan.com
kaoyan.com 考研加油站

您所下载的资料来源于 kaoyan.com 考研资料下载中心
获取更多考研资料，请访问 http://download.kaoyan.com