# 1999年天津大学概率论与数理统计考研试题

一.(10分) 甲.乙二人比赛击剑，每进行一局比赛胜者得1分。在一局比赛中甲胜的概率是$p$，乙胜的概率是$q$（$0<p<1$, $0<q<1$, $p+q=1$）。击剑比赛依次进行直到有一人比对方多2分，则此人获胜，并结束比赛。试分别求甲最终获胜和乙最终获胜的概率。

二.(16分) 设随机变量$\xi,\eta$相互独立，且均服从$N(0,1)$分布。令$U=\xi+\eta$，$V=\xi-\eta$。(1) 求$(U,V)$的联合概率密度；(2) $U,V$相互独立。

三.(16分) 设随机变量$X$的概率密度为$p(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$，$-\infty<x<+\infty$。

(1) 求$Y=|X|$的分布函数$F_Y(y)$；

(2) 证明：对任何实数$a>0$, $b>0$，有

$$P\{Y\geq a+b \mid Y\geq a\}=P\{Y\geq b\}.$$

四.(18分) 设$\{\xi_n\}$, $n=1,2,\cdots$为独立同$N(a,\sigma^2)$分布的随机变量序列。令

$\eta_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(\xi_k-a)^2$，且已知$\left(\frac{\xi-a}{\sigma}\right)^2$的特征函数为$(1-2it)^{-\frac{1}{2}}$。

(1) 求$\eta_n$的特征函数。

(2) 利用特征函数求$\eta_n$的数学期望$E\eta_n$。

(3) $\{\eta_n\}$, $n=1,2,\cdots$依分布收敛吗？若是，求它依分布收敛的极限分布函数。

五.(18分) 设$X_1,\cdots,X_n$为来自正态总体$N(0,\sigma^2)$的样本。记$\theta=\sigma^2$。

(1) 求$\theta$的矩估计$\hat{\theta}_1$及极大似然估计$\hat{\theta}_2$。

(2) 求$\theta$的无偏估计量$\hat{\theta}$的方差的Rao—Cramer下界。

(3) 设$\hat{\theta}_1=\frac{1}{n}\sum X_i^2$，求证$\hat{\theta}_1$为$\theta$的有效估计

六.(8分) 某医院观察心脏病住院病人猝死状况，几年来，在清晨(3:00—9:00)、中午(9:00—15:00)、傍晚(15:00—21:00)及夜间(21:00—3:00)各死亡44, 25, 31, 20人。试问：猝死概率在四个时段上能认为是相等的

吗($\alpha=0.05$)？（$\chi^2$分布的0.95分位数为 $\chi^2_{0.95}(2)=5.99$ $\chi^2_{0.95}(3)=7.82$，$\chi^2_{0.95}(4)=9.49$ ）。

七.（14分）设随机变量$Z$满足条件

$$Z=ax+by+\varepsilon,\qquad 其中 E(\varepsilon)=0,\ V(\varepsilon)=\sigma^2.$$

设 $x, y, Z$ 的$n$次观测值为 $(x_1, y_1, Z_1), (x_2, y_2, Z_2), \cdots, (x_n, y_n, Z_n)$.

记参数 $\beta=\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

(1) 将此问题写成线性模型，并求出$\beta$的最小二乘估计$\hat{\beta}$.

(2) 求证
$$\mathrm{Cov}(\hat{a}, \hat{b})=\frac{-\sigma^2 L_{xy}}{L_{xx}L_{yy}-L_{xy}^2}.$$

其中 $L_{xx}=\sum x_i^2$，$L_{xy}=\sum x_i y_i$，$L_{yy}=\sum y_i^2$.