1999 年天津大学高等代数考研试题

一 填空题（共 15 分，每一小题 3 分）

1. 設四级方阵 $A=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，$B=(\beta,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4)$，其中 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\beta$ 为四维列向量，若 $|A|=1$，$|B|=2$，则 $|A+B|=$ ______

2. 設 A 为 n 級可逆矩陣，如果交换 A 的第 i 行与第 j 行得到 B，则 $BA^{-1}=$ ______

3. 設向量組 (I) $=\left\{ X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{cases} x_1-x_2-x_3-x_4-\cdots-x_n=0 \\ x_2-x_3-x_4-\cdots-x_n=0 \end{cases} \right\}$，則向量組 (I) 的秩等于 ______

4. 設 A 为 n 級方陣，若 $A\neq 3E$，且 $r(A-3E)+r(A+5E)=n$，則数 $\lambda=$ ______ 必是 A 的特征值.

5. 多項式 $x^3+3px+q$ 有重根的条件是 ______

二 选择题（共 15 分，每一小题 3 分）

1. 如果六級方陣 A 的秩等于 4，則 A 的伴随矩陣 A^* 的秩等于（　　）

(A) 4

(B) 3

(C) 2

(D) 0

2. 設 α_1,α_2 是非齐次线性方程組 $AX=\beta$ 的两个特解，又 η_1,η_2 是对应的齐次线性方程組 $AX=0$ 的一个基础解系，k_1,k_2 为任意常数，則 $AX=\beta$ 的全部解为（　　）

(A) $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+k_1\eta_1+k_2(\eta_1-\eta_2)$

(B) $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k_1\eta_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

(C) $\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}+k_1\eta_1+k_2(\eta_1+\eta_2)$

(D) $\frac{\alpha_1-\alpha_2}{2}+k_1\eta_1+k_2(\alpha_1-\alpha_2)$

3. 設三級方陣 A 的三个特征值为 1, 2, −2，且 B 与 A 相似，則 B 的伴随矩陣 B^* 的三个特征值为（　　　　）

(A) $-4,\ -2,\ 2$，

(B) $1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}$，

(C) $1,\ 2,\ -2$，

(D) $-\frac{1}{4},\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}$。

4、設三级方陣A的行列式 $|A|=\frac{1}{2}$， A^{-1} 为A的逆矩陣，A^{*} 为A的伴随矩陣

則 $\left|A^{*}-(\frac{1}{2}A)^{-1}\right| = ($　　　　$)$

(A) 0 ·

(B) -3 ·

(C) $\frac{27}{4}$ ·

(D) $-\frac{27}{4}$ ·

5、設 三级方陣 $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ ，$B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31}+a_{11} & a_{32}+a_{12} & a_{33}+a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$

$P_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$　　　$P_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

則必有（　　　　）

(A) $AP_1P_2=B$

(B) $AP_2P_1=B$

(C) $P_1P_2A=B$

(D) $P_2P_1A=B$

三（共60分 每一小題 10分）

1、設 $f(x)=d(x)\cdot f_1(x)$； $g(x)=d(x)\cdot g_1(x)$；

証明：若 $(f(x), g(x))=d(x)$ 且 $f(x)$ 和 $g(x)$ 不全为零，則 $(f_1(x), g_1(x))=1$，

反之若 $(f_1(x), g_1(x))=1$， 則 $d(x)$ 是 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最大公因式

2、问 a，b 取何值时，下列线性方程组

$$\begin{cases} ax_1+x_2+x_3=4 \\ x_1+bx_2+x_3=3 \\ x_1+2bx_2+x_3=4 \end{cases}$$

有唯一解？无解？有无穷多解？在有无穷多解时，求其全部解。

3. 設三級方陣 $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 4 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(1) 求 A 的最小多项式.

(2) 求 A 的初等因子.

(3) 求 A 的若当标准形.

4. 設三級实对称矩陣 $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$

(1) 求一个正交矩陣 C 及对角形矩陣 Λ，使 $C^TAC=\Lambda$.

(2) 求一个对称矩陣 B 使 $A=B^2$

5. 設 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$ 为线性空间 V_4 的一组基. $\mathcal{A}$ 是 V_4 上的一个线性变换. 且 $\mathcal{A}\alpha_1=\alpha_4$,

$\mathcal{A}\alpha_2=\alpha_3$,

$\mathcal{A}\alpha_3=\alpha_2$.

$\mathcal{A}\alpha_4=0$.

(1) $\mathcal{A}V_4$ 及 $\mathcal{A}^{-1}(0)$

(2) 求 $\mathcal{A}$ 的特征值 和对应的特征子空间

(3) 试问在 V_4 中是否存在一組基，使 $\mathcal{A}$ 在该基下的矩陣为对角形矩陣，说明理由.

6. 設线性空间 V_n 中向量 α 在一組基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. 且 α 在另一組基 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 下的坐标为 $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$

又 $y_1=x_1$, $y_2=x_2-x_1$, $y_3=x_3-x_2$ $\cdots$ $y_{n-1}=x_{n-1}-x_{n-2}$,

$y_n=x_n-x_{n-1}$,

(1) 求由基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 到基 $\beta_1, \beta_2 \cdots \beta_n$ 的过渡矩陣 T

(2) 已知 $\gamma=\beta_1+2\beta_2+3\beta_3+\cdots+n\beta_n$

求 γ 在基 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_n$ 下的坐标

四．（共10分 每一小题 5分）．

1. 設 $\alpha_1, \alpha_2 \cdots \alpha_{n-1}$ 是歐氏空間 R^n 中一正交向量組，$\beta_1, \beta_2 \in R^n$

且 $(\beta_1, \alpha_i)=0$
$(\beta_2, \alpha_i)=0$ $\quad i=1,2,\cdots n-1$

証明：β_1, β_2 线性相关．

2. 設 A. B. C $R^{n\times n}$

$$D=\begin{pmatrix} A & B^T \\ B & C \end{pmatrix}$$

若 D是正定矩陣，証明：$C-BA^{-1}B^T$ 也是正定矩陣