1999 年天津大学数学分析考研试题

一、填空题(15 分)(请将答案写在答题纸上,注意写清大、小题号):

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{2x+3}=$______.

2. $\int_{-1}^{1}\frac{x^3\sin(1+x^2)}{\sqrt{1+x^2}}dx=$______

3. 设 $u=x^{y^z}$,则 $\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(2,2,1)}=$______

4. 设 S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$,则 $\oiint\limits_S(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}dS=$______

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}=$______

二、单项选择题(10 分)(请将所选答案的序号写在答题纸上,注意写清大、小题号)

1. 设有数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$,若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$,则(　　)

A) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$　　B) $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$.

C) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$ 时,$\{y_n\}$ 有界　　D) 当 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$ 时,$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=0$

2. 下列函数在开区间(0,1)内一致连续的是(　　)

A) $f(x)=\frac{1}{x}$.　　B) $g(x)=\sin\frac{1}{x}$.　　C) $h(x)=\frac{x}{2-x^2}$.　　D) $s(x)=\ln x$

3. 下列级数收敛的是(　　)

A) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$.　　B) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[\ln(1+n)]^{\frac{1}{n+1}}}$.　　C) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1+n^2}{1+n^3}$.　　D) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\ln n}$.

4. 设二元函数 $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处沿任意方向的方向导数都存在且相等,则(　　)

A) $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处可微.

B) $f(x,y)$ 在点 $M(x_0,y_0)$ 处连续.

C) $f(x,y)$ 的两个偏导数在点 $M(x_0,y_0)$ 处连续.

D) $f(x,y)$ 在 $M(x_0,y_0)$ 点的两个偏导数存在且相等.

5. 设 $f(x)=\begin{cases}1 & -1<x<0\\ 0 & x=0\\ -2 & 0<x<1\end{cases}$ 的以 2 为周期的傅立叶级数的和函数为 $S(x)$,则 $S(-4)=$(　　)

A) 0　　B) $\frac{1}{2}$　　C) -1　　D) $-\frac{1}{2}$

三、计算题(15 分):

1. 求 $\lim\limits_{x\to0^+} x^{\sin x}$;　　　　2. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5^n n!}{(2n)^n}$;

3. 设 $u=f(x,xy,xyz)$ 且 f 具有二阶连续偏导数,求 $\frac{\partial^2 u}{\partial z\partial y}$

四、解下列各题(15 分):

1. 设 D 是由抛物线 $y^2=x$, $y^2=2x$ 及双曲线 $xy=1$、$xy=2$ 围成的平面闭域,求 D 的面积.

2. 已知圆柱螺线 $\Gamma_{(A,B)}:\begin{cases}x=\cos t\\ y=\sin t\ \ (0\le t\le 2\pi)\\ z=t\end{cases}$ 的线密度为 $\mu(x,y,z)=\frac{z^2}{x^2+y^2}$,求 $\Gamma_{(A,B)}$ 的质量 m

3. 计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{S^-} x^3\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 S^- 是单位球面的内侧.

五、解下列各题(15 分):

1. 要制造一个容积为 4 立方米的无盖长方体水箱,问该水箱的长、宽、高各为几米时,所用材料最省?

2. 求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n(n+1)x^n$ 的收敛域与和函数.

3. 证明当 $0<x<\pi$ 时, $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1}=\frac{\pi}{4}$

六、证明题(10 分):

1. 利用确界存在原理证明:若实数列 $\{x_n\}$ 单调减、有下界,则 $\{x_n\}$ 收敛且

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\nu,\ (\text{其中 } \nu=\inf_{n\in N}\{x_n\}).$$

2. 若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$ 存在,则 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界.

七、证明题(15 分):

1. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛,则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也收敛.

2. 设对任意 $n\in N$,函数 $f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上有定义而且单调.试证:若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(a)|$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|f_n(b)|$ 都收敛,则函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

3. 试证:对任意 $\eta>0$,含参量广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{t}{t^2+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 t 在区间 $(1+\eta,+\infty)$ 内都不一致收敛.

八、(5 分)求定积分 $\int_0^1\frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$