1999年天津大学最优化方法（线性规划与非线性规划）考研试题

一、填空题（满分27分）

1. 线性规划
$$\begin{cases} \max & x_1-2x_2+3x_3 \\ s.t. & x_1+x_2+x_3\le 6 \\ & x_1-x_2+x_3\ge 2 \\ & x_2, x_3\ge 0 \end{cases}$$
的标准型是______

2. 已知线性规划
$$\begin{cases} \min & 2x_1-x_2 \\ s.t. & x_1+x_2+x_3=5 \\ & -x_1+x_2+x_4=0 \\ & 6x_1+2x_2+x_5=21 \\ & x_1,\cdots,x_5\ge 0 \end{cases}$$
则与基变量 x_2, x_3, x_5 对应的规范式为______。

3. 设(LP)为线性规划 $\begin{cases} \min & C^TX \\ s.t. & AX\ge b, X\ge 0 \end{cases}$，其对偶规划为(DP)。$\bar{X}$是(LP)的可行解，$\bar{Y}$是(DP)的可行解，则对应的目标函数值满足关系式______。

4. 求解无约束规划问题 $\min f(x)$，X_k不满足最优性条件，在X_k处的搜索方向是P_k。

当用最速下降法求解时，$P_k=$______。

当用Newton法求解时，$P_k=$______。

当用DFP拟Newton法求解时，$P_k=$______。

当用FR共轭梯度法求解时，$P_k=$______。

5. 已知规划问题
$$\begin{cases} \min & z=x_1^2+x_2^2-x_1x_2-2x_1-3x_2 \\ s.t. & -x_1-x_2\ge -2 \\ & -x_1-5x_2\ge -5, \quad x_1, x_2\ge 0 \end{cases}$$

则在点 $\bar{X}=(\frac{5}{6},\frac{5}{6})^T$ 处的可行方向集为 ________，下降方向集为 ________。

二、(满分30分) 某厂需用A、B、C三种资源生产甲、乙、丙三种产品。为使该厂获最大利润，建立了如下线性规划：

$$\begin{cases} \max\ z=10x_1+6x_2+4x_3 \\ s.t.\ \ x_1+x_2+x_3\le 100 \\ \quad 10x_1+4x_2+5x_3\le 600 \\ \quad 2x_1+2x_2+6x_3\le 300 \\ \quad x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

其中 x_1,x_2,x_3 分别表示产品甲、乙、丙的计划产量。

1. 用单纯形法求解此线性规划；
   最优生产方案是什么？最大利润是多少？
2. 按这个方案生产，哪种资源将用尽？哪种有剩余、剩余数
3. 写出最优基矩阵B及 B^{-1}；
4. 设A种资源的数量(100)有误差 Δb_1，试求出 Δb_1 的范围，使已求出的生产方案仍是最优方案；
5. 写出所建线性规划的对偶规划及对偶规划的最优解

三、(满分7分) 用对偶单纯形法求解线性规划：

$$\min\ z=5x_1+2x_2+4x_3$$

$$s.t.\begin{cases} 6x_1+3x_2+5x_3\ge 10 \\ 3x_1+x_2+2x_3\ge 4 \\ x_1,x_2,x_3\ge 0 \end{cases}$$

四、(满分5分) 在区间[-1,1]上用黄金分割法求函数 $\varphi(\alpha)=\alpha^2-\alpha+2$ 的极小点。求出初始的两个试点及保留区间。

五、(满分5分) 验证点 $(\frac{1+\sqrt{17}}{2},\frac{1-\sqrt{17}}{2})^T$ 与 $(0,-3)^T$ 是否是规划问题

$$\begin{cases} \min f(x)=x_1^2+x_2 \\ s.t.\ \ x_1^2+x_2^2\le 9 \\ \quad -x_1-x_2+1\ge 0 \end{cases}$$

的KT点。对KT点写出对应的Lagrange乘

六．（满分6分）用Newton法求解二次函数

$$f(X)=(x_1-x_2+x_3)^2+(-x_1+x_2+x_3)^2+(x_1+x_2-x_3)^2$$

的极小值。取初始点 $X_0=(\frac{1}{2},1,\frac{1}{2})^T$。

七．（满分20分）证明下列命题

1．已知 $f(X)=\frac{1}{2}X^TGX+C^TX$，其中 G 是正定对称矩阵。试证：若 X_1 与 X_2 分别是 $f(X)$ 在两条平行于方向 d 的直线上的极小点，则方向 $u=X_2-X_1$ 与方向 d 关于 G 共轭。

2．已知规划问题 $(P)\begin{cases}\min f(X)\\ s.t.\ g_i(X)\geq 0,\ i=1,\cdots,m\end{cases}$

设 $f(X)$、$-g_i(X)$ $(i=1,\cdots,m)$ 为凸函数。试证

(1) 规划问题 (P) 为凸规划；

(2) 问题 (P) 的最优解集合 R^* 为凸集；

(3) 问题 (P) 的任何局部最优解都是整体最优解。