

2001 年天津大学运筹学基础考研试题

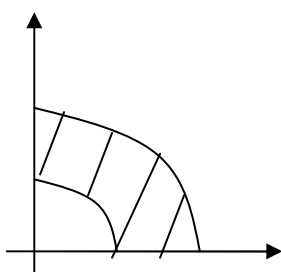
一、(20 分) 选择填空 (将所选答案的标号填在空白处, 各空填一个标号)

1. 下列数学模型中 a 是线性规划模型。

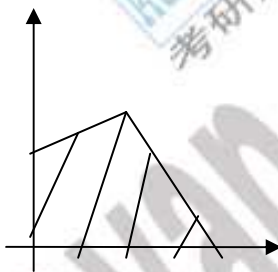
$$(a) \max Z = 4x_1 + 2x_2 + 3x_3 \quad (b) \max Z = \min \left\{ \frac{7x_1 + 6x_2 + 8x_3}{4}, \frac{5x_1 + 9x_2 + 2x_3}{3} \right\}$$

$$s.t. \begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + 6x_3 \leq 150 \\ 4x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 120 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases} \quad s.t. \begin{cases} 5x_1 + 5x_2 + 3x_3 \leq 300 \\ 6x_1 + 9x_2 + 8x_3 \leq 500 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

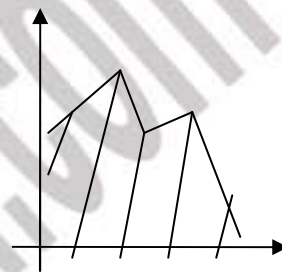
2. 下列图形 (阴影部分) 中 b 是凸集。



(a)



(b)



(c)

3. 标准形式的线性规划问题, 其可行解 b 是基本可行解, 最优解 a 是可行解, 最优解 a 能在可行域的某顶点达到。

(a) 一定 (b) 不一定 (c) 一定不

4. 目标函数取极小 ($\min Z$) 的线性规划问题可以转化为目标函数取极大 b 的线性规划问题求解, 原问题的目标函数值等于 c。

(a) $\max Z$ (b) $\max (-Z)$ (c) $-\max (-Z)$ (d) $-\max Z$

5. 动态规划问题的研究对象是 b, 其求得的一般方法是 c。

(a) 工程路线问题 (b) 多段决策问题 (c) 迭代求解 (d) 单纯形法

6. 网络分析中的最短路问题从发点 s 到收点 t 的最短路长 b 是唯一的, 最短路线 a 是唯一的。

(a) 不一定 (b) 一定

7. 网络最大流问题中, 最大流的流量 a 是唯一的, 最大流 b 是唯一的。

(a) 一定 (b) 不一定

8. M/M/1 排队系统指的是顾客流为 b 服务时间为 a 有 d 个服务台的排队系统。

(a) 负指数分布 (b) 泊松流 (c) 定长分布 (d) 一个 (e) M 个

9. 运用表上作业法求解运输问题时, 计算检验数可以用 b, 确定初始方案可以用 a。

二、(18分) 某公司生产3种产品: x_1, x_2, x_3 , 需要3种资源: 技术服务, 动力和行政管理, 公司经理助理根据公司实际情况, 建立了使总利润最大的产品产量的线性规划模型, 并

$$\max Z = 10x_1 + 6x_2 + 4x_3$$

$$s.t. \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 100 \text{(技术服务约束)} \\ 10x_1 + 4x_2 + 5x_3 \leq 600 \text{(劳动力约束)} \\ 2x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 300 \text{(行政管理约束)} \end{cases}$$

采用单纯形法求得最优表格如下:

| C_8 | X_8 | $\begin{matrix} C_8 \\ b \\ X_8 \end{matrix}$ | 10 | 6 | 4 | 0 | 0 | 0 | Q_j |
|-------|-------|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | | | X_1 | X_2 | X_3 | X_4 | X_5 | X_6 | |
| 6 | X_2 | 400/6 | 0 | 1 | 5/6 | 10/6 | -1/6 | 0 | |
| 10 | X_1 | 200/6 | 1 | 0 | 1/6 | -4/6 | 1/6 | 0 | |
| 0 | X_5 | 100 | 0 | 0 | 4 | -2 | 0 | 1 | |
| -Z | | 4400/6 | 0 | 0 | -8/3 | -10/3 | -2/3 | 0 | q_j |

在向总经理汇报时, 总经理提出以下问题:

1. 公司3中资源的影子价格各是多少?
2. 若要现行解保持最优, 则产品 X_1 的单位利润不得低于何值?
3. 若产品 X_3 值得生产的话, 它的单位利润应是多少?
4. 制造部门提出要生产一种新产品, 该单位产品要技术服务1小时, 劳动力4小时, 行政管理3小时。销售部门预测这种产品出售时可获8元的单位利润, 管理部门是否考虑应将此新产品投产?

现请帮助经理助理回答以上问题。

解: 1. 公司3种资源的影子价格分别为: 技术服务: $\frac{10}{3}$, 劳动力: $\frac{2}{3}$

2. 对于第1种产品, 产品 x_1, x_1 的单位利润为 C_1

$\because x_1$ 是基变量

$\therefore C_1$ 变化将影响各非基变量检验数

在保持 $\sigma_3, \sigma_4, \sigma_5 \leq 0$ 的情况下, 现行解保持最优, 则:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_3 = 4 - \left(6 \quad C_1 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 4 \end{pmatrix} = -1 - \frac{1}{6}C_1 \leq 0 \\ \sigma_4 = 0 - \left(6 \quad C_1 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{10}{6} \\ -\frac{4}{6} \\ -2 \end{pmatrix} = -10 + \frac{4}{6}C_1 \leq 0 \Rightarrow 6 \leq C_1 \leq 18 \\ \sigma_5 = 0 - \left(6 \quad C_1 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} -\frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 0 \end{pmatrix} = 1 - \frac{1}{6}C_1 \leq 0 \end{array} \right.$$

同理的：对于 C_2 , $\because x_2$ 为基变量, $\therefore C_2$ 变化将影响各非基变量检验数

$$\text{只要使: } \begin{cases} \sigma_3 = \frac{7}{3} - \frac{5}{6}C_2 \leq 0 \\ \sigma_4 = \frac{10}{6}C_2 + \frac{20}{3} \leq 0 \Rightarrow 4 \leq C_2 \leq 10, \text{ 现行解保持最优} \\ \sigma_5 = \frac{1}{6}C_2 - \frac{10}{6} \leq 0 \end{cases}$$

对于 x_3 , $\because x_3$ 是非基变量, $\therefore C_3$ 变化只对 σ_3 有影响, 只要保证 $\sigma_3 \leq 0$, 现行解保持最优

$$\therefore \sigma_3 = C_3 - \left(6 \quad 10 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 4 \end{pmatrix} = C_3 - \frac{20}{3} \leq 0 \Rightarrow C_3 \leq \frac{20}{3}$$

3. 若产品 x_3 值为生产, 则 x_3 应为基变量, \therefore 在单纯性表中 $\sigma_3 \geq 0$, 即 C_3 至少应为 $\frac{20}{3}$

$$4. \text{ 设新产品为 } x_7, \text{ 则 } \sigma_7 = 8 - \left(6 \quad 10 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{10}{6} & -\frac{1}{6} & 0 \\ -\frac{4}{6} & \frac{1}{6} & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} = 2 \Rightarrow 8 - 6 > 0$$

\therefore 应将新产品投产

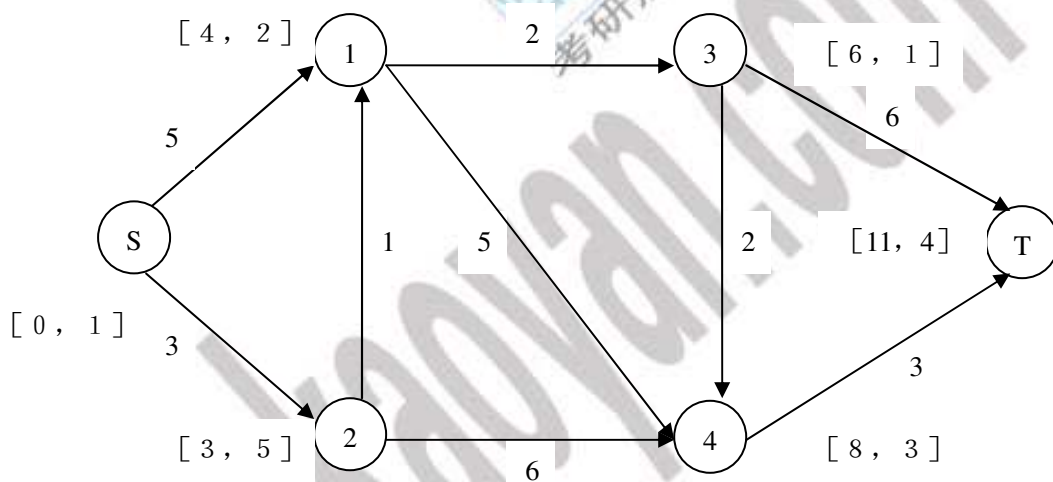
3. 若产品 x_3 值为生产, 则 x_3 应为基变量, \therefore 在单纯性表中 $\sigma_3 \geq 0$, 即 C_3 至少应为 $\frac{20}{3}$

$$4. \text{设新产品为 } x_7, \text{ 则 } \sigma_7 = 8 - \left(6 \quad 10 \quad 0 \right) \begin{pmatrix} \frac{5}{6} \\ \frac{1}{6} \\ 4 \end{pmatrix}$$

三、(14 分) 下图为某地区的交通网络图, 结点表示城市, 箭杆边的数字表示城市间的公路距离, 现要求出从 S 城到 T 城的最短路线和最短距离。

1. 以选用哪些运筹学方法求解此问题? (至少举出两种方法)

2. 选用一种方法求解该问题。



解: 1. 最短路问题, 动态规划

2. 这是个最短路问题, 可以用标号法来解答

\therefore 最短路线是 $S \rightarrow 2 \rightarrow 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow T$

最短距离是 11。

四、(18 分) 某工厂有一个半成品加工操作间, 内设一个半成品加工操作台和可存放 3 个待加工半成品的场地。已知半成品按平均每天 3 个的泊松过程到达该操作间, 而完成该半成品加工的必要时间服从平均每个需 $1/4$ 天的指数分布。若半成品到达操作间时操作间内已没有场地存放, 则要运往其它地方。

(1) 需运往其它地方的半成品占到操作间的半成品总数的比例是多少?

(2) 假设每移动一个半成品到它处需 200 元, 为提高效率减少移动费用可采取两种改进方案。方案一: 增加一个空位每天需要 10 元, 方案二: 提高加工效率至少每个 $1/5$ 天每天需要 15 元。问是否应该采用改进方案, 如应该采用改进方案则何种方案最佳?

解: $\lambda = 3 \text{ 个/天}, \mu = 4 \text{ 个/天}, N = 4, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4}$

$$(1) P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5} = 0.328$$

$$p_N = \rho^N P_0 = \left(\frac{3}{4}\right)^4 \times 0.328 = 0.104$$

$$(2) \text{方案一: } \lambda = 3 \text{ 个/天, } \mu = 4 \text{ 个/天, } N = 5, \rho = \frac{3}{4}$$

$$\text{原方案: } L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{5 \times \left(\frac{3}{4}\right)^5}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^5} = 1.44 (\text{个})$$

$$L_q = L_s - (1 - P_0) = 1.44 - 1 + 0.328 = 0.77 (\text{个})$$

$$\text{方案一: } L_{SA} = \frac{\frac{3}{4}}{1-\frac{3}{4}} - \frac{6 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^6} = 1.70 \quad p_0 = \frac{1-\frac{3}{4}}{1-\left(\frac{3}{4}\right)^6} = 0.304$$

$$\text{方案二: } \lambda = 3 \text{ 个/天, } \mu = 5 \text{ 个/天, } N = 4, \rho = \frac{3}{5}$$

$$P_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{N+1}} = \frac{1-\frac{3}{5}}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^5} = 0.434$$

$$L_s = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(N+1)\rho^{N+1}}{1-\rho^{N+1}} = \frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{3}{5}} - \frac{5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5}{1-\left(\frac{3}{5}\right)^5} = 1.08 (\text{个})$$

$$L_q = L_s - (1 - P_0) = 1.08 - 1 + 0.434 = 0.51 (\text{个})$$

\therefore 节省的费用为 $(0.77 - 0.51) \times 200 = 52 > 51$

五、(20 分) 某公司投资证券市场, 现有两种方案。方案 A_1 : 投资股市, 方案 A_2 : 投资证券。公司投资顾问认为: 方案 A_1 在大盘走势好 (θ_1) 时可能获利 50 万元, 在大盘走势弱 (θ_2) 时可能损失 10 万元。方案 A_2 投资证券基本上无风险, 可获利 10 万元。先验估计 $P(\theta_1) = 0.3$, $P(\theta_2) = 0.7$ 。投资顾问认为大盘走势和国家宏观经济形式密切相关。并建议请经济研究所进行预测, 预测费用为 1 万元。根据统计资料, 该所预测精度的条件概率如下:

其中 S_1 表示国家宏观经济形式良好, S_2 表示国家宏观经济形式不好

| 先验概率 $P(\theta_j)$ | 条件概率 $P(S_i/\theta_j)$ | |
|-----------------------|------------------------|-------------------|
| | $P(S_1/\theta_j)$ | $P(S_2/\theta_j)$ |
| $P(\theta_1) = 0.3$ | 0.8 | 0.2 |
| $P(\theta_2) = 0.7$ | 0.1 | 0.9 |
| | | |

解：先验分析： $E(A_1) = 50 \times 0.3 - 10 \times 0.7 = 8$ $E(A_2) = 10$

初步认为选择投资证券 比较好 $\therefore EMV^*(\text{先}) = 10(\text{万})$

预验分析： $EPPI = 50 \times 0.3 + 10 \times 0.7 = 22$

$\therefore EVPI = 22 - 10 > 1$ \therefore 初步认为应该进行咨询

后验分析： $\therefore P(\theta_1) = 0.3, P(\theta_2) = 0.7$

$\therefore p(S_1, \theta_1) = 0.24, p(S_1, \theta_2) = 0.07 \Rightarrow p(s_1) = 0.31$

$p(S_2, \theta_1) = 0.06, p(S_2, \theta_2) = 0.63 \Rightarrow p(s_2) = 0.69$

$\therefore P(\theta_1 | S_1) = \frac{0.24}{0.31} = 0.77$ $P(\theta_2 | S_1) = \frac{0.07}{0.31} = 0.23,$

$P(\theta_1 | S_2) = \frac{0.06}{0.69} = 0.09$ $P(\theta_2 | S_2) = \frac{0.63}{0.69} = 0.91$

\therefore 当 S_1 出现时, $E(A_1 | S_1) = 0.77 \times 50 - 0.23 \times 10 = 36.2$ $E(A_2 | S_1) = 10$

\therefore 选择 A_1 , 相应在经济预报国家 宏观经济形式良好时, 选择 A_1 方案可获最大收益

$E(S_1) = 36.2$

当 S_2 出现时, $E(A_1 | S_2) = 0.09 \times 50 - 0.91 \times 10 = -4.6$ $E(A_2 | S_2) = 10$

\therefore 选择 A_2 , 相应在经济预报国家 宏观经济形式良好时, 选择 A_2 方案可获最大收益

$E(S_2) = 10$

计算补充信息价值, $EMV^*(\text{后}) = 36.2 \times 0.31 + 10 \times 0.69 = 18.12$

\therefore 气象中心提供补充信息 的价值 $EMV^*(\text{后}) - EMV^*(\text{前}) = 18.12 - 10 = 8.12 > 1$

\therefore 这种花费是值得的

