武汉大学

2005年攻读硕士学位研究生入学考试试题

科目名称：线性代数　　　　科目代码：491

注意:所有的答题内容必须答在答题纸上,凡答在试题或草稿纸上的一律无效。

一、(20分) 设 A 是元素全为1的 n 阶方阵, E 是 n 阶单位矩阵.

(1) 求行列式 $|aE+bA|$ 的值,其中 a,b 是实常数;

(2) 已知 $1<\mathrm{rank}(aE+bA)<n$,试确定 a,b 所满足的条件,并求下列线性子空间的维数:

$$W=\{x \mid (aE+bA)x=0,\ x\in\mathbb{R}^n\}.$$

二、(20分) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^4$ 中,已知向量组Ⅰ: $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 线性无关,向量组

$$\text{Ⅱ}:\quad \beta_1=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix},\ \beta_2=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\1\end{pmatrix},\ \beta_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\\0\end{pmatrix},\ \beta_4=\begin{pmatrix}2\\-2\\-3\\3\end{pmatrix}.$$

(1) 求向量组Ⅱ的秩;

(2) 试问Ⅰ组能否由Ⅱ组线性表示? Ⅱ组能否由Ⅰ组线性表示? 请阐述理由.

(3) 求由向量组Ⅱ所生成的线性子空间的一个标准正交基.

三、(20分) 已知实二次型 $f=x_1^2+x_2^2+x_3^2+9x_4^2+2a(x_1x_2+x_2x_3+x_3x_1)$,问当 a 取何值时, f 是正定的、半正定的、以及不定的二次型?

四、(20分) 在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中, $\xi=(a,b,c)$ 为一已知单位向量,线性变换 $\mathscr{A}$ 定义为

$$\mathscr{A}(\alpha)=\alpha-2(\alpha,\xi)\xi,\quad \forall\alpha\in\mathbb{R}^3$$

(1) 证明 $\mathscr{A}$ 是 $\mathbb{R}^3$ 的一个正交变换;

(2) 求 $\mathscr{A}$ 关于 $\mathbb{R}^3$ 的基 $e_1=(1,0,0),e_2=(0,1,0),e_3=(0,0,1)$ 的矩阵 A.

五、(20 分) 设 $\boldsymbol{E}$ 是 n 阶单位矩阵,证明:

(1) 若 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 都是 n 阶矩阵,$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}$,且 $\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$ 是可逆矩阵,则

$$\operatorname{rank}(\boldsymbol{AB})=\operatorname{rank}(\boldsymbol{BA}).$$

(2) 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{E}-\boldsymbol{\xi}\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$,其中 $\boldsymbol{\xi}$ 是 n 维列向量,$\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{\xi}$ 的转置,则 $\boldsymbol{\xi}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}=1$ 的充分必要条件是 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A})<n$.

(3) 若 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶实矩阵,且 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{E}$,其中 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵,则 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵.

六、(20 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{\beta}=(b_1,b_2,\cdots,b_m)^{\mathrm{T}}$ 是 m 维列向量,证明下述命题相互等价:

(1) 线性方程组 $\boldsymbol{Ax}=\boldsymbol{\beta}$ 有解;

(2) 齐次方程组 $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的任一解 $(x_1,x_2,\cdots,x_m)^{\mathrm{T}}$ 必满足

$$x_1b_1+x_2b_2+\cdots+x_mb_m=0;$$

(3) 线性方程组 $\begin{pmatrix}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\\ \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\end{pmatrix}\boldsymbol{x}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0}\\ 1\end{pmatrix}$ 无解,其中 $\boldsymbol{0}$ 是 n 维零向量.

七、(15 分) 设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&5&5\\0&4&3\\0&a&2\end{pmatrix}$ 有一个二重特征值.

(1) 试求 $\boldsymbol{A}$ 的最小多项式与 Jordan 标准形.

(2) 确定 $\boldsymbol{A}$ 相似于对角矩阵的充分必要条件.

八、(15 分) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 n 阶矩阵, λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的 n 重特征值,$\operatorname{rank}(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})=n-1$.

(1) 求使 $(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^m=\boldsymbol{O}$ 的最小正整数 m;

(2) 证明:$(\lambda_0\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})^{n-1}$ 必有一个列向量是 $\boldsymbol{A}$ 的属于 λ_0 的特征向量.

(满分值 150 分)