1999 年南开大学泛函分析考研试题

一、设 (X,d) 是距离空间，$E\subset X$ 试说明以下概念的定义

1) E 是列紧集；2) E 是全有界集；3) E 是紧集。

并且讨论这三个概念之间的关系。（16分）

二、叙述并且证明压缩映射原理。（18分）

三、设 $K(s,t)$ 是正方形区域，$0\le s\le 1$；$0\le t\le 1$ 上的连续函数

$$Tx(t)=\int_0^1 K(s,t)x(s)ds \quad, (x\in C[0,1]).$$

证明 T 是 $C[0,1]$ 到 $C[0,1]$ 中的全连续（紧）算子。（16分）

四、设 H 是 Hilbert 空间，$x, x_n\in H$ $(n=1,2,\cdots)$

$$x_n \xrightarrow{w} x \ (n\to\infty) \text{ 且 } \|x_n\|\longrightarrow\|x\| \ (n\to\infty)$$

证明 $x_n\longrightarrow x \ (n\to\infty)$。（16分）

五、设 X, Y 是 Banach 空间，$T: X\to Y$ 是线性算子并且对任意 $\{x_n\}\subset X$，当 $x_n\to 0 \ (n\to\infty)$ 时，对于每一个 $f\in Y^*$ $f(Tx_n)\to 0 \ (n\to\infty)$。证明 T 是连续的。（16分）

六、设 $(X,\|\cdot\|)$ 是赋范线性空间。证明 $(X,\|\cdot\|)$ 是 Banach 空间，当且仅当，对任意 $\{x_n\}\subset X$，当 $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|<\infty$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}x_n$ 收敛。（18分）