1999年南开大学计算方法考研试题

20分 1. 设A是$n\times n$实矩阵，试证，

(i) $\|A\|_2=\max\limits_{\|x\|_2=\|y\|_2=1}|y^TAx|$，其中x和y为n维实向量；

(ii) $\|A^T\|_2=\|A\|_2$；

(iii) $\|A^TA\|_2=\|A\|_2^2$。

20分 2. 设矩阵

$$A=\begin{bmatrix}1&a&a\\a&1&a\\a&a&1\end{bmatrix}，其中a为实数.$$

(i) 对a的哪些值，A是正定阵？

(ii) 对a的哪些值，J-迭代格式收敛？

(iii) 对a的哪些值，GS-迭代格式收敛？

20分 3. 设$l_k(x)=\prod\limits_{\substack{j=0\\j\neq k}}^{n}\frac{x-x_j}{x_k-x_j}$为n次Lagrange插值的基函数，$k=0,1,\cdots,n$。试证：

(i) $\sum\limits_{k=0}^{n}(x_k-x)^m l_k(x)=0$，$m=1,2,\cdots,n$；

(ii) $l_0(x)=1+\frac{x-x_0}{x_0-x_1}+\frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}+\cdots+\frac{(x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\cdots(x_0-x_n)}$

20分 4. 已知均匀分划上的m阶B样条函数

$$M_m(x)=\delta^m x_+^{m-1}/(m-1)!，$$

其中δ为以1为步长的中心差分算子，试证递推公式

$$M_{m+1}(x)=\frac{1}{m}\left[\left(\frac{m+1}{2}+x\right)M_m\left(x+\frac{1}{2}\right)\right.$$

$+(\frac{m+1}{2}-x)M_m(x-\frac{1}{2})]$，$m=1,2,\cdots$.

205 5. 设给定初值问题 $\begin{cases}\frac{du}{dt}=f(t,u), & t_0\le t\le T,\\ u(t_0)=u_0,\end{cases}$

其中 $f(t,u)$ 在 $t_0\le t\le T$, $|u|<+\infty$ 内连续，且关于 u 满足 Lipschitz 条件.

(i) 试证，求解上述初值问题的二阶 RK 方法

$$\begin{cases}u_{n+1}=u_n+h(w_1K_1+w_2K_2),\\ K_1=f(t_n,u_n),\quad K_2=f(t_n+\alpha_2h,\ u_n+h\beta_2K_1)\end{cases}$$

的收敛性，其中 $w_1+w_2=1$，$\alpha_2w_2=\frac{1}{2}$，$\beta_2=\alpha_2$.

(ii) 已给二步方法

$$u_{n+2}-(1+a)u_{n+1}+au_n$$
$$=\frac{h}{12}[(5+a)f_{n+2}+8(1-a)f_{n+1}-(1+5a)f_n],$$

此处 $-1\le a<1$，试求方法的绝对稳定区间.