1999年南开大学偏微分方程数值解法考研试题

(15分) 1. 记 $I=(a,b)$，试证：必存在常数 $M_1, M_2>0$ 使得：

$\forall v\in H^1(I)$，成立估计

$$M_1(|v|_1+|v(a)|)\le \|v\|_1\le M_2(|v|_1+|v(a)|).$$

其中 $|v|_1^2=\int_a^b v'^2dx$，$\|v\|_1^2=\int_a^b (v^2+v'^2)dx$.

(20分) 2. 给定问题

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(p_2(x)\frac{d^2u}{dx^2}\right)-\frac{d}{dx}\left(p_1(x)\frac{du}{dx}\right)+q(x)u=f(x),\quad x\in I=(0,1) \qquad (A)$$

$$u(0)=u'(0)=0,\quad u(1)=u'(1)=0$$

其中 $p_2\in W^{2,\infty}(I)$，$p_1\in W^{1,\infty}(I)$，$q\in L^\infty(I)$，$f\in L^2(I)$ 且

$p_2(x)\ge p_0>0$，$p_1(x)\ge 0$，$q(x)\ge 0$，$\forall x\in I$

(1) 写出上述问题(A)的Galerkin变分形式

(2) 证明：(1)中的变分问题有唯一解.

(5分) 3. 设 H 为 Hilbert 空间，范数为 $\|\cdot\|_H$，$V_h\subset H$，为有限维子空间. 已知：

$u\in H$，满足：$a(u,v)=F(v)$，$\forall v\in H$.

$u_h \in V_h$ 满足: $a(u_h, v) = F(v)$, $\forall v \in V_h$;

其中 $a(w,v)$: $H\times H \to R$, 对称性, 正定, 有界;

$F(v)$: $H \to R$, 线性, 有界.

(i) 试证: 必存在常数 $\beta>0$ 使:

$$\|u-u_h\|_H \le \beta \|u - \Pi_h u\|_H.$$

其中 $\Pi_h u$ 为 u 在 V_h 中的插值;

(ii) 设 $V_h = \mathrm{span}\{\phi_1,\phi_2,\cdots,\phi_N\}$, $\phi_i\in H$, $\{\phi_i\}_1^N$ 线性无关.

记 $A_{ij} = a(\phi_j,\phi_i)$, $A=[A_{ij}]_{N\times N}$.

试证: $\det A\neq 0$, 而 A 为非奇异.

4. 给定问题

$$\left.\begin{array}{l} -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), \quad x\in I=(0,1) \\ u(0)=0, \quad u'(1)=0 \end{array}\right\} \quad (B)$$

其中 $p\in W^{1,\infty}(I)$, $q\in L^{\infty}(I)$, $f\in L^2(I)$, 且

$p(x)\ge p_0>0$, $q(x)\ge q_0>0$, $\forall x\in I$.

设 $u\in H^2(I)$ 为上述问题 (B) 的[illegible]解, $u_h\in V_h$

为 u 的 Galerkin 逼近, 其中 V_h 为 I 上的线性元空间,

由此有估计

$$\|u-u_h\|_1 \le C_0 h|u|_2 ,$$

且对 u 有正则性估计

$$\|u\|_2 \le K\|f\| .(\text{常数}K\text{与}u,f\text{无关})$$

试证：存在常数 $C_1>0$ 使

$$\|u-u_h\| \le C_1 h^2 |u|_2 .$$

5. 给定初值问题

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{\partial u}{\partial t}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+u,\ -\infty<x<+\infty,\ 0<t\le T\\ u(x,0)=\varphi(x),\ -\infty<x<+\infty\end{array}\right\}(C)$$

取空间步长 Δx，时间步长 Δt，记 $x_j=j\Delta x$，$j=0,\pm1,\pm2,\cdots$，$t_n=n\Delta t$，$n=0,1,\cdots,N=[\frac{T}{\Delta t}]$，对 (C) 常用差分格式：

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{U_j^{n+1}-U_j^n}{\Delta t}=\dfrac{U_{j+1}^n-2U_j^n+U_{j-1}^n}{(\Delta x)^2}+U_j^n,\ j=0,\pm1,\pm2,\cdots\\ \qquad n=0,1,\cdots,N-1\\ U_j^0=\varphi_j\end{array}\right\}(D)$$

i) 写出格式 (D) 对问题 (C) 的局部截断误差.

ii) 记 $r=\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$，问：在何条件下，格式 (D) 稳定？给出 $\sup\limits_j|U_j^n|$ $(n\Delta t\le T)$ 的估计式；

iii) 在何条件下格式 (D) 收敛，给出 $\sup\limits_j|u_j^n-U_j^n|$ 的估计式.