2000年南开大学泛函分析考研试题

一、设$\{x_n\}$是Banach空间X中的点列，x_0是X中一点，试说明$\{x_n\}$弱收敛于x_0与$\{x_n\}$强收敛于x_0的定义并说明这两种收敛性的关系（要求写出证明或举适当的例）

（13分）

二、试说明紧（全连续）算子的定义，试对无穷维Banach空间上的紧算子与非紧算子各举一例（要求写出证明）

（12分）

三、证明存在区间$[0,1]$上的连续函数$x(t)$，使得

$$x(t)=\frac{1}{2}\sin x(t)-a(t).$$

其中$a(t)$是给定的$[0,1]$上的连续函数.

（15分）

四、设X是区间$[a,b]$上所有连续函数全体按通常方式定义线性运算所构成的线性空间，对于$x\in X$定义

$$\|x\|=\sup_{a\le t\le b}|x(t)| ;\quad \|x\|_1=\int_a^b|x(t)|dt.$$

证明$\|x\|$，$\|x\|_1$是X上两个不等价的范数

（15分）

五　设 $(X, \|\cdot\|)$ 是可分的赋范空间，证明存在可数子集 $\Phi \subset X^*$，使得对于每一个 $x \in X$

$$\|x\| = \sup_{f \in \Phi} |f(x)|.$$

（15分）

六、设 M 是 Hilbert 空间 H 的线性子空间，T 是 M 上到 H 中的有界线性算子，证明 H 上存在一个有界线性算子 $\tilde{T}$，使得在 M 上 $\tilde{T}$ 与 T 相等且 $\|\tilde{T}\| \le \|T\|_M$.

（15分）

七. 设 T 是 Hilbert 空间 H 上的线性算子且对所有 $x, y \in H$，

$$(Tx, y) = (x, Ty).$$

证明 T 是有界算子.